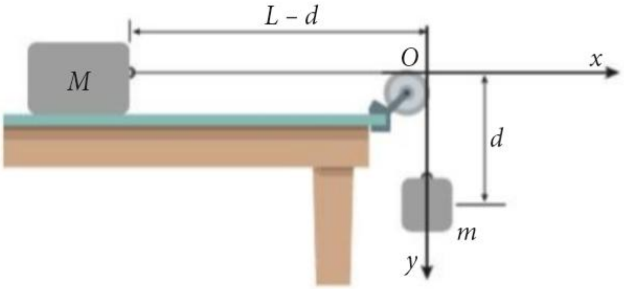
80 ◆◆◆ La figura mostra un sistema di due masse ($M = 6{,}0$ kg, $m = 3{,}0$ kg) collegate da una fune di lunghezza totale $L = 3{,}0$ m.



- Determina le coordinate della posizione del centro di massa in funzione di d, cioè della distanza dall'origine O della massa m.
- Il centro di massa può passare per il punto A (0,0 m; 1,0 m)?

Suggerimento: centra il sistema di riferimento sulla carrucola, come è mostrato nella figura.

[(−2,0 m + 2/3 d; 1/3 d); sì]

CORPO M $\quad (-(L-d), 0)$

CORPO m $\quad (0, d)$

$C_M\,(x_{CM}, y_{CM})$

$$x_{CM} = \frac{M(d-L) + m \cdot 0}{M+m} = \frac{M(d-L)}{M+m}$$

$$y_{CM} = \frac{M \cdot 0 + md}{M+m} = \frac{md}{M+m}$$

$$x_{CM} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{9}_{\,3}}(d - 3{,}0\,m) = \boxed{\frac{2}{3}d - 2{,}0\,m}$$

$0 \le d \le L$

$$y_{CM} = \frac{3}{9}d = \boxed{\frac{1}{3}d}$$

$$\left(\frac{2}{3}d - 2, \frac{1}{3}d\right)$$

PASSA PER $(0,1)$?

CIOÈ $\Downarrow$

ESISTE UN VALORE DI d

CHE MI DÀ COME COORDINATE $(0,1)$?

SÌ, $d = 3$

$\frac{2}{3}d - 2 = 0 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}d = 1$

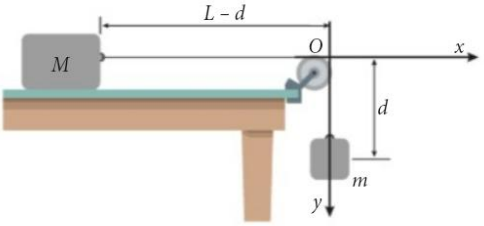
ALTRO MODO = trovo l'equazione della traiettoria del CM

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}d - 2 \\ y = \frac{1}{3}d \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot (\cancel{3}y) - 2 \\ d = 3y \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2y - 2 \quad \text{eq. di una retta}$$

Passa per $(0,1)$? SÌ $\quad 0 = 2 \cdot 1 - 2$ OK

86 ◆◆◆ **PROBLEMA A PASSI**

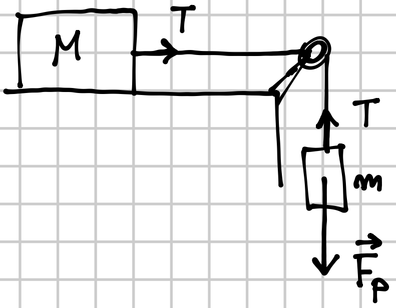
Considera lo stesso sistema dell'esercizio 80 con gli stessi dati. Trascura gli attriti.



- Trova le coordinate del centro di massa in funzione del tempo.
- Ricava l'equazione cartesiana della traiettoria del centro di massa.

$\left[\left(-2{,}0\ \text{m} + \frac{2}{3}d + \frac{1}{9}gt^2;\ \frac{1}{3}d + \frac{1}{18}gt^2\right);\ y_{CM} = \frac{1}{2}x_{CM} + 1{,}0\ \text{m}\right]$

1. Usa la seconda legge della dinamica per calcolare l'accelerazione dei due oggetti.
2. Usa il risultato dell'esercizio 80 e la legge oraria del moto uniformemente accelerato per esprimere le coordinate del centro di massa in funzione del tempo.
3. Ricava il quadrato del tempo da una delle due equazioni per x_{CM} e y_{CM} e sostituiscilo nell'altra per ottenere l'equazione cartesiana della traiettoria del centro di massa.



$$\begin{cases} T = Ma \\ F_p - T = ma \end{cases} \qquad \begin{cases} T = Ma \\ mg - ma = T \end{cases}$$

$F_p \leftarrow mg$

$$\Downarrow$$

$$Ma = mg - ma$$

$$Ma + ma = mg$$

$$(M+m)a = mg \Rightarrow a = \frac{m}{M+m}g$$

$$a = \frac{3}{3+6}g = \frac{1}{3}g$$

Blocco M si muove con acc. $\overbrace{\left(\frac{1}{3}g, 0\right)}^{\vec{a}_M}$ Blocco m si muove con acc. $\overbrace{\left(0, \frac{1}{3}g\right)}^{\vec{a}_m}$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{M\vec{a}_M + m\vec{a}_m}{M+m}$$ (deriva dalla formula $M_{TOT}\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{TOT,est}$)

$$a_{x_{CM}} = \frac{M\frac{1}{3}g}{M+m} = \frac{2}{9}g \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}g\right)t^2 + \frac{2}{3}d - 2{,}0\ \text{m}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{9}gt^2 + \frac{2}{3}d - 2{,}0\ \text{m}}$$

$$a_{y_{CM}} = \frac{m\frac{1}{3}g}{M+m} = \frac{1}{9}g \Rightarrow y_{CM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}g\right)t^2 + \frac{1}{3}d$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{1}{18}gt^2 + \frac{1}{3}d}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} g t^2 + \frac{2}{3} d - 2 \\ y = \frac{1}{18} g t^2 + \frac{1}{3} d \end{cases}$$

equazioni parametriche del moto del centro di massa

Per trovare l'equazione cartesiana della traiettoria eliminiamo il parametro t:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} g t^2 + \frac{1}{3} d$$

$$y - \frac{1}{3} d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} g t^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{9} g t^2}_{} = 2\left(y - \frac{1}{3} d\right)$$

sostituisco nella 1ª equazione

$$x = 2\left(y - \frac{1}{3} d\right) + \frac{2}{3} d - 2$$

$$x = 2y - \cancel{\frac{2}{3} d} + \cancel{\frac{2}{3} d} - 2$$

$$2y = x + 2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} x + 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{1}{2} x_{CM} + 1{,}0 \text{ m}}$$

88 ◆◆◆ **ORA PROVA TU** Determina il vettore velocità e il vettore accelerazione del centro di massa del sistema descritto nell'esercizio 86.

$$\left[\left(\frac{2}{9}gt\right)\hat{x}+\left(\frac{1}{9}gt\right)\hat{y};\left(\frac{2}{9}g\right)\hat{x}+\left(\frac{1}{9}g\right)\hat{y}\right]$$

Nell'esercizio 86 abbiamo trovato che

$$\vec{a}_{CM} = \left(\frac{2}{9}g,\ \frac{1}{9}g\right)$$

dunque il moto di CM lungo x è unif. accelerato con accelerazione $\frac{2}{9}g$ e lungo y è unif. accelerato con acc. $\frac{1}{9}g$, per cui

$$\vec{V}_{CM} = \left(\frac{2}{9}gt,\ \frac{1}{9}gt\right)$$