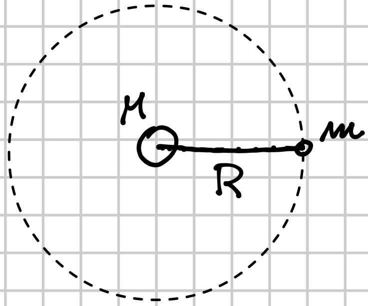
115 **ARGOMENTA** Considera un satellite di massa m che descrive un'orbita circolare a distanza R dal centro di un pianeta di massa M, che consideriamo fermo.

- Dimostra che l'energia potenziale U del sistema pianeta-satellite è uguale al doppio dell'energia cinetica K del satellite, cambiata di segno: $U = -2K$.
- Di conseguenza, mostra che l'energia meccanica totale $E_{tot} = K + U$ del sistema è uguale all'opposto dell'energia cinetica del satellite: $E_{tot} = -K$.



$$U = -G\frac{Mm}{R}$$ EN. POTENZIALE DEL SISTEMA PIANETA-SATELLITE

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$ EN. CINETICA DEL SATELLITE

velocità di un satellite in orbita:

$$G\frac{M\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}$$

$$K = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R}$$

$$K = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-G\frac{Mm}{R}\right) = -\frac{1}{2}U \Rightarrow \boxed{U = -2K}$$

$$E_{TOT.} = U + K = -2K + K = -K \Rightarrow \boxed{E_{TOT} = -K}$$

116 **DIMOSTRA** Un pianeta di massa m esegue un'orbita ellittica con semiasse maggiore a attorno a una stella di massa M, nel sistema di riferimento in cui essa è ferma. Si dimostra che in questo caso l'energia meccanica totale del sistema stella-pianeta è $E_{tot} = K + U = -G\frac{mM}{2a}$.

- Dimostra che questo risultato è coerente con quello trovato nella domanda precedente.

$$E_{TOT} = -G\frac{mM}{2a} \Longrightarrow \quad E_{TOT} = -G\frac{mM}{2r} \stackrel{?}{=} -K = \frac{U}{2}$$

caso moto circolare $a = r$

RISPOSTA = SÌ, l'uguaglianza (?) è vera perché $\frac{U}{2} = -G\frac{mM}{2r}$

119 **ORA PROVA TU** Europa, uno dei satelliti di Giove ($M = 1{,}90 \times 10^{27}$ kg), quando si trova nel perigiovio ha una distanza dal suo pianeta di $66{,}5 \times 10^{7}$ m e un'energia cinetica di $4{,}57 \times 10^{30}$ J.

- Calcola l'energia totale e potenziale del sistema Europa-Giove al perigiovio;
- Determina la massa di Europa.

[$-4{,}57 \times 10^{30}$ J; $-9{,}14 \times 10^{30}$ J; $4{,}80 \times 10^{22}$ kg]

Supponiamo che la traiettoria di Europa sia circolare

$$E_{TOT} = -G\frac{mM}{2r} = -K = -4{,}57 \times 10^{30}\ \text{J}$$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{2rK}{GM} = \frac{2(66{,}5 \times 10^{7}\ \text{m})(4{,}57 \times 10^{30}\ \text{J})}{\left(6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right)(1{,}90 \times 10^{27}\ \text{kg})} =$$

$$= 47{,}96\ldots \times 10^{21}\ \text{kg} \simeq \boxed{4{,}80 \times 10^{22}\ \text{kg}}$$

$$U = -2K = -2(4{,}57 \times 10^{30}\ \text{J}) = \boxed{-9{,}14 \times 10^{30}\ \text{J}}$$