226 Data la funzione di variabile reale $f(x) = \frac{2-x}{3x+1}$:

a. determina il dominio D e l'insieme immagine $Im(f)$;

b. dimostra che è biiettiva da D a $Im(f)$;

c. risolvi l'equazione $f(|x|) = f(-x)$;

d. risolvi la disequazione: $\sqrt{f(x)+1} \leq \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, Im(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}; \text{c) } x \leq 0; \text{d) } -\frac{11}{5} \leq x \leq -\frac{3}{2}\right]$

a) DOMINIO $\Rightarrow 3x+1 \neq 0 \quad x \neq -\frac{1}{3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Per trovare l'insieme immagine devo capire per quali y l'equazione

$$y = \frac{2-x}{3x+1}$$

ha soluzione, cioè per quali y esiste almeno una x tale che $\frac{2-x}{3x+1} = y$.
In pratica, dato y cerchiamo di ricavare x:

$$y = \frac{2-x}{3x+1} \Rightarrow (3x+1)y = 2-x \Rightarrow 3xy + y = 2-x$$

$y \in$ CODOMINIO

$$\Rightarrow 3xy + x = 2-y \Rightarrow x(3y+1) = 2-y$$

$$\Rightarrow x = \frac{2-y}{3y+1} \text{ esiste se } 3y+1 \neq 0 \Rightarrow y \neq -\frac{1}{3}$$

Quindi $\text{im} f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Ciò significa che tutti gli y tranne $-\frac{1}{3}$ hanno una controimmagine.
Infatti l'equazione $\frac{2-x}{3x+1} = -\frac{1}{3}$ è impossibile

b) f è biettiva da D a im f

Basta controllare che f è iniettiva, poiché se la mando dal dominio all'insieme immagine è certamente suriettiva.

$$\frac{2-x_1}{3x_1+1} = \frac{2-x_2}{3x_2+1}$$

$$(2-x_1)(3x_2+1) = (2-x_2)(3x_1+1)$$

$$6x_2 \cancel{+2} \cancel{-3x_1x_2} - x_1 = 6x_1 \cancel{+2} \cancel{-3x_1x_2} - x_2$$

$$6x_2 - x_1 = 6x_1 - x_2$$

$$6x_2 + x_2 = 6x_1 + x_1$$

$$7x_2 = 7x_1$$

$x_2 = x_1$ è iniettiva

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+1}$

$f(|x|) = \dfrac{2-|x|}{3|x|+1}$ $f(-x) = \dfrac{2-(-x)}{3(-x)+1}$ $f(\text{Giovanni}) = \dfrac{2-\text{Giovanni}}{3\text{Giovanni}+1}$

$f(|x|) = f(-x) \Rightarrow \dfrac{2-|x|}{3|x|+1} = \dfrac{2+x}{-3x+1}$ C.E. $x \neq \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{2+x}{-3x+1} = \dfrac{2+x}{-3x+1} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \wedge x \neq \frac{1}{3} \\ \dfrac{2-x}{3x+1} = \dfrac{2+x}{-3x+1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x \leq 0}$$

sempre vera $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$

$\Downarrow$

$x<0$

$\Downarrow$

$x=0$

$$-6x \cancel{+3x^2} \cancel{+2} - x = 6x \cancel{+3x^2} \cancel{+2} + x$$

$$-14x = 0 \Rightarrow x = 0$$

d) $\sqrt{f(x)+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\sqrt{\frac{2-x}{3x+1}+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2-x+3x+1}{3x+1}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2x+3}{3x+1}} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{3x+1} \geq 0 & \boxed{1} \\ \frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{1}{4} & \boxed{2} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $\frac{2x+3}{3x+1} \geq 0$

N $2x+3>0$ $\quad x>-\frac{3}{2}$

D $3x+1>0$ $\quad x>-\frac{1}{3}$

		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{3}$	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$-$		$-$	$\nexists$	$+$
	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$x \leq -\frac{3}{2} \lor x>-\frac{1}{3}$

$\boxed{2}$ $\frac{2x+3}{3x+1}-\frac{1}{4} \leq 0 \qquad \frac{8x+12-3x-1}{4(3x+1)} \leq 0 \qquad \frac{5x+11}{\cancel{4}(3x+1)} \leq 0$

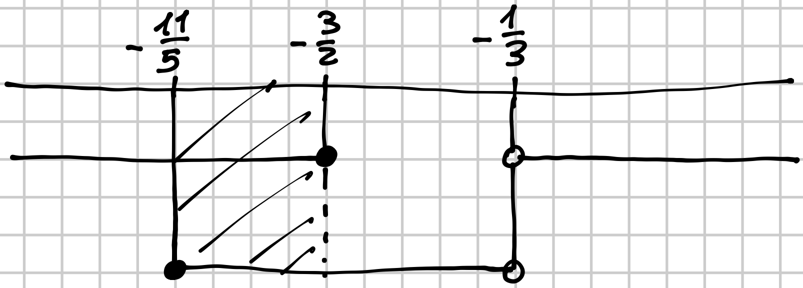
N $5x+11>0$ $\quad x>-\frac{11}{5}$

D $3x+1>0$ $\quad x>-\frac{1}{3}$

		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$	
N	$-$	0	$+$		$+$
D	$-$		$-$	$\nexists$	$+$
	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$-\frac{11}{5} \leq x < -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \lor x>-\frac{1}{3} \\ -\frac{11}{5} \leq x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$



$$\boxed{-\frac{11}{5} \leq x \leq -\frac{3}{2}}$$