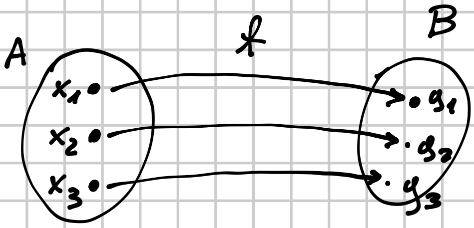
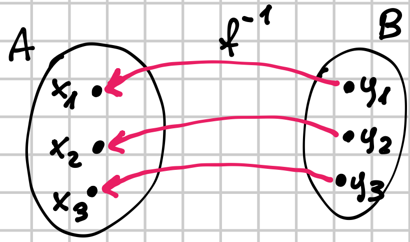
FUNZIONE INVERSA

Data $f: A \to B$ BIETTIVA



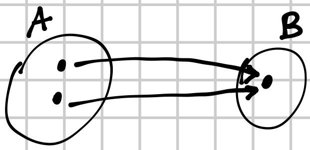
la sua funzione INVERSA $f^{-1}: B \to A$



è la funzione che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere la sua controimmagine (tramite f)

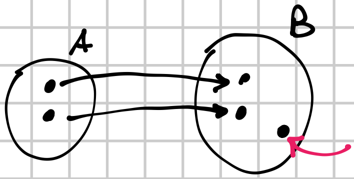
La funzione di partenza $f: A \to B$ deve essere BIETTIVA perché:

- INIETTIVA, altrimenti



"tornando indietro" avrei 2 immagini per lo stesso elemento

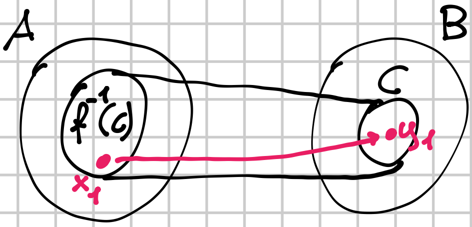
- SURIETTIVA, altrimenti



"tornando indietro" questo elemento non avrebbe immagine

OSSERVAZIONE

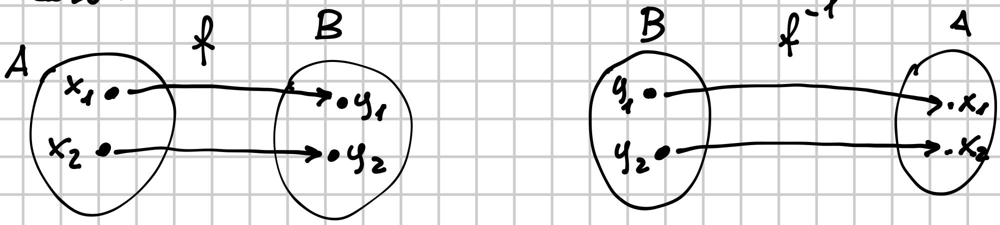
Data una funzione qualsiasi $f: A \to B$, e dato un insieme $C \subseteq B$, con la notazione $f^{-1}(C)$ si indica l'insieme delle controimmagini di C:



$$f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$$

$$f^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1\}$$

Nel caso in cui f^{-1} indichi una funzione inversa, la notazione va trattata così:



$y_1 = f(x_1)$ $\quad$ $x_1 = f^{-1}(y_1)$

$y_2 = f(x_2)$ $\quad$ $x_2 = f^{-1}(y_2)$

ESEMPI

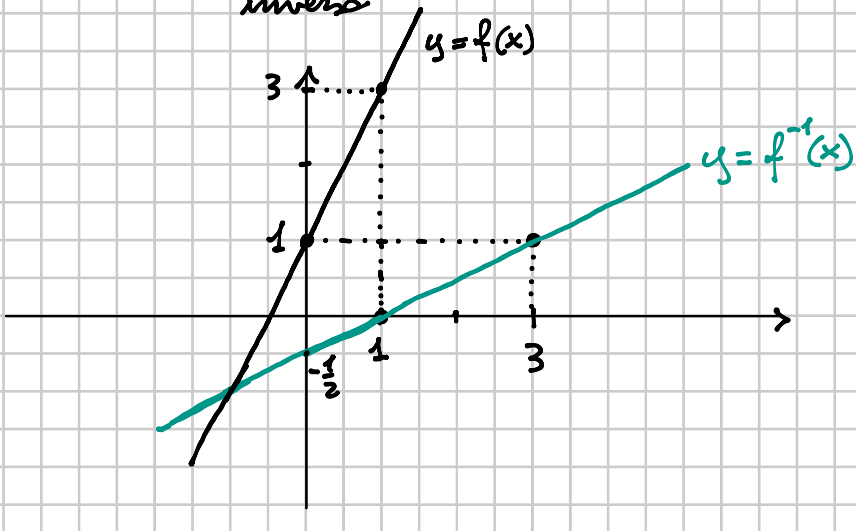
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x + 1$ è BIETTIVA, dunque ammette inversa

$$y = 2x + 1 \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

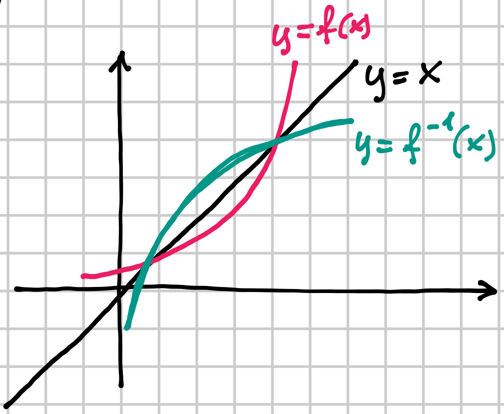
$$\Downarrow$$

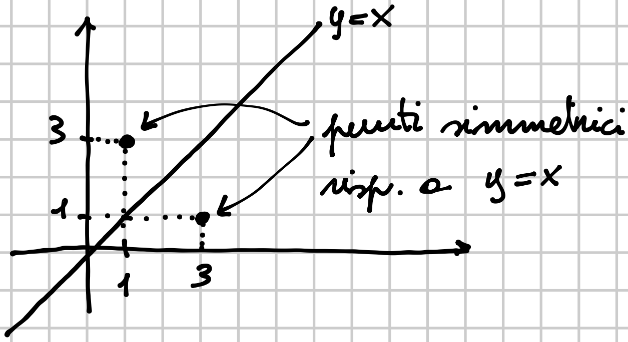
SCAMBIO LA X CON LA Y $\longrightarrow$ è il grafico della funzione inversa $\quad y = \dfrac{x-1}{2}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$



Il grafico della funzione inversa f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice I-III quadrante $y=x$





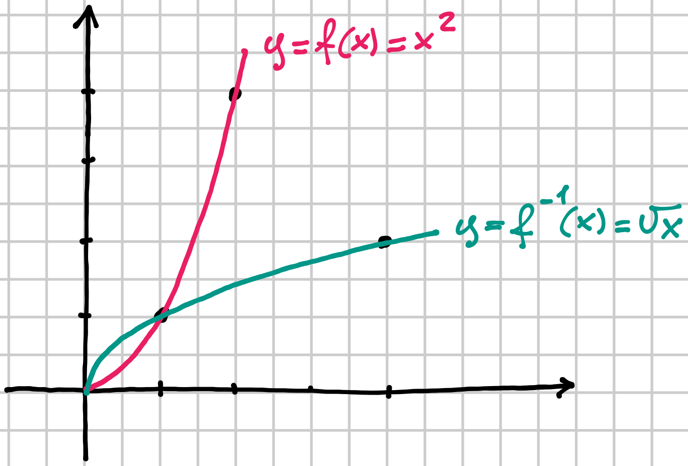
2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$ non è invertibile perché non è BIETTIVA

3) $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ $\quad f(x)=x^2$ è invece BIETTIVA, dunque invertibile

$$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow y=\sqrt{x}$$

non c'è $\pm$ perché so che $x\geq 0$

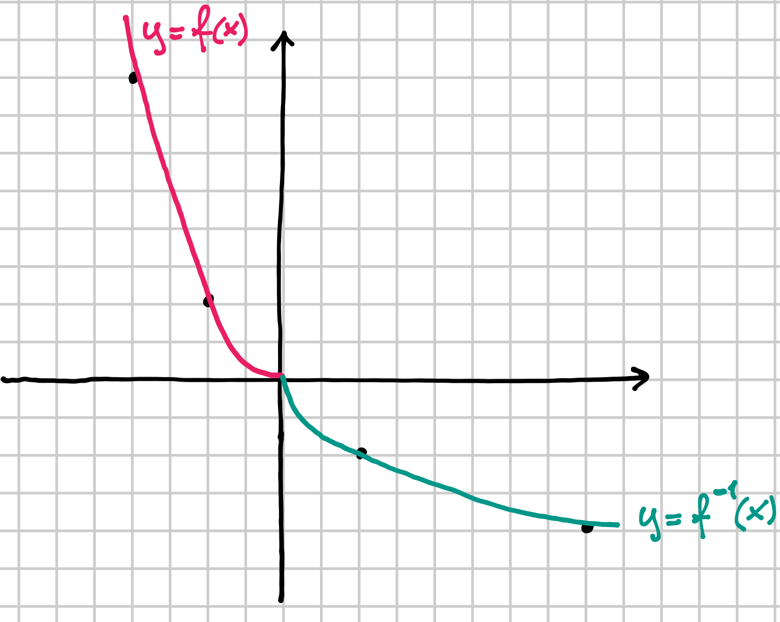
scambio



$f^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

4) $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$ $\quad f(x)=x^2$ è biettiva e invertibile



$$y=x^2 \Rightarrow x=-\sqrt{y}$$

$x\leq 0$ perché il dominio è $(-\infty,0]$

$\Downarrow$

$y=-\sqrt{x}$

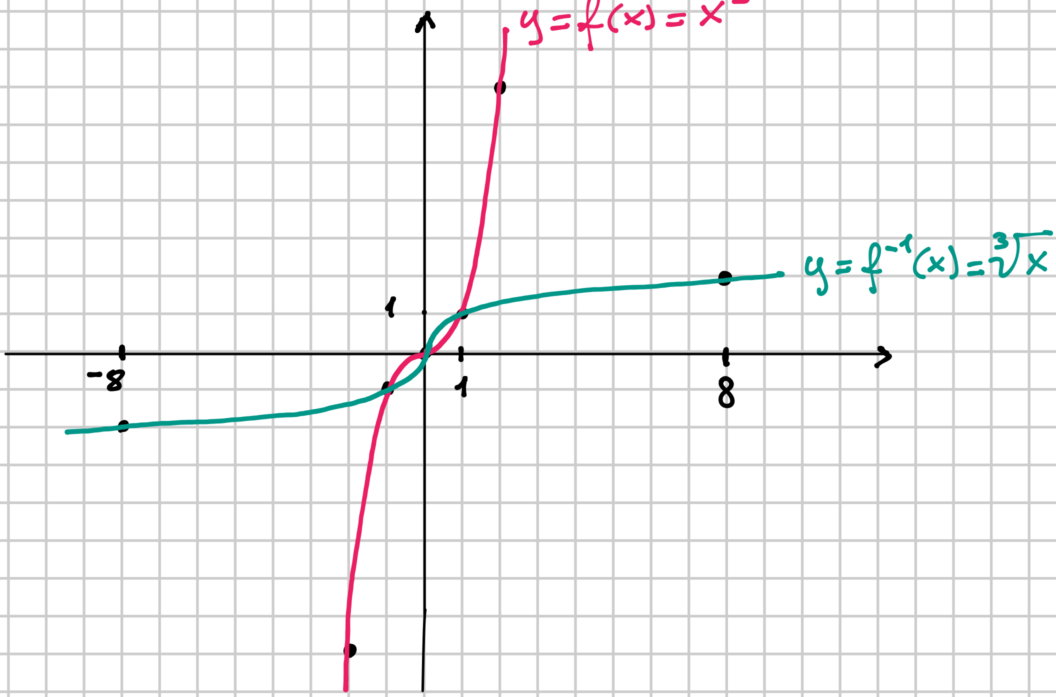
$f^{-1}:[0,+\infty)\to(-\infty,0]$

$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$

5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$ $\quad$ è biettiva e invertibile

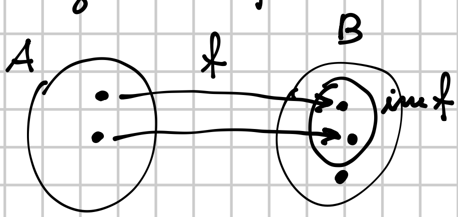
$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



OSSERVAZIONE 1

Per l'analisi matematica, affinché una funzione sia invertibile basta l'ipotesi di INIETTIVITÀ da sola: se ho una funzione $f: A \to B$ solo iniettiva posso infatti invertirla prendendo come dominio di f^{-1} l'insieme immagine $\operatorname{im} f$



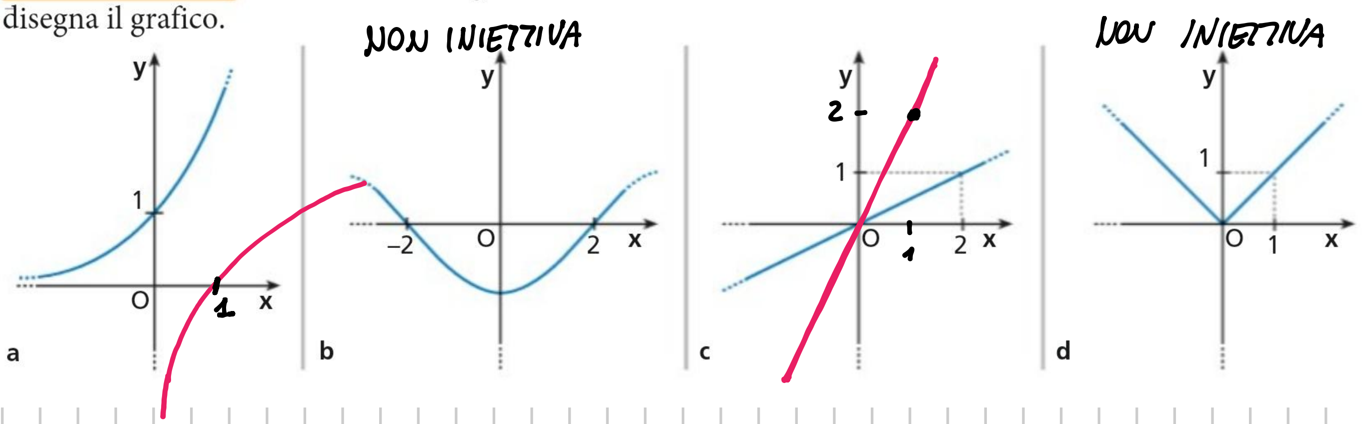
$f^{-1}: \operatorname{im} f \to A$

OSSERVAZIONE 2

Se f^{-1} è l'inversa di f, anche f è l'inversa di f^{-1}:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

228 **LEGGI IL GRAFICO** Stabilisci se le seguenti funzioni ammettono la funzione inversa e in caso affermativo disegna il grafico.



236 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, dimostra che è invertibile e poi risolvi l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$.

$[x = 2]$

$f: [-1, +\infty) \to [0, +\infty)$

è iniettiva

$\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1} \quad \forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$

$D: x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

$x_1 = x_2$

è suriettiva

$y \in \text{cod} f$, cioè se $y \geq 0$

$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y^2 = x+1$

$\Rightarrow x = y^2 - 1 \geq -1$ dunque $x \in \text{dom} f$

È invertibile $f^{-1}: [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$

$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

$f^{-1}(x) = f(8)$

$x^2 - 1 = \sqrt{8+1}$

$x^2 - 1 = 3$

$x^2 = 4$

$x = \begin{cases} -2 & \text{NON ACC. perché } x \in [0, +\infty) \\ 2 \end{cases}$

$\boxed{x = 2}$

241 $y = \sqrt[3]{3x-1}$ $\left[y = \dfrac{x^3+1}{3}\right]$

È BIETTIVA. Calcoliamo l'inversa

$$y = \sqrt[3]{3x-1} \Rightarrow y^3 = 3x-1 \Rightarrow 3x = y^3+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^3+1}{3} \xRightarrow[\text{SCAMBIO}]{} y = \frac{x^3+1}{3}$$