FUNZIONI PARI E FUNZIONI DISPARI

$f: D \to \mathbb{R}$ è

PARI se $\forall x \in D \quad -x \in D$ e $f(x) = f(-x)$

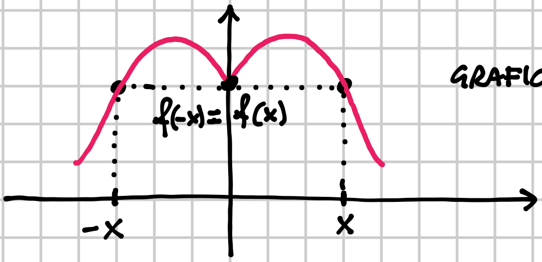
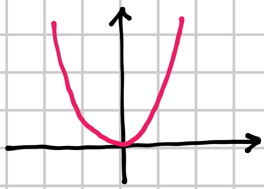


GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y

ESEMPI

1) $f(x) = x^2$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

f è PARI

2) $g(x) = x^2 - 1 \qquad g(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = g(x) \qquad$ g è PARI

3) $h(x) = x^2 - 2x \qquad h(-x) = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x \neq h(x)$ in generale

$h(-1) = (-1)^2 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$

$h(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

$\neq$

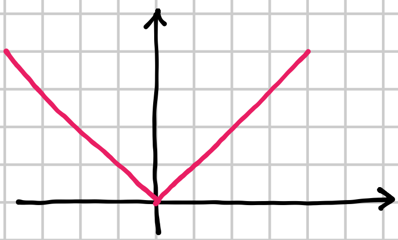
h NON È PARI

4) $f(x) = x^4$ è PARI

In generale ogni funzione x^n con n pari è pari. $(n \in \mathbb{N})$

5) $f(x) = |x|$ è PARI

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < \end{cases}$$

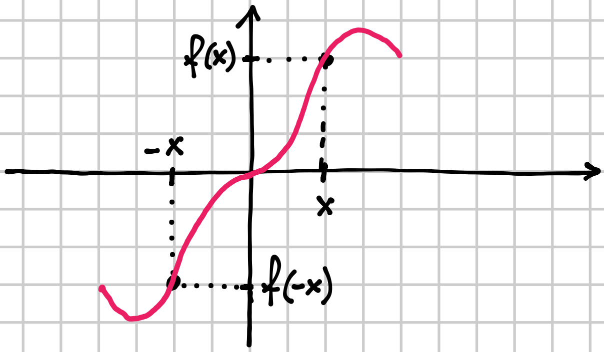


$f : D \to \mathbb{R}$ è

DISPARI se $\forall x \in D \quad -x \in D$ e $f(-x) = -f(x)$

$$\Updownarrow$$

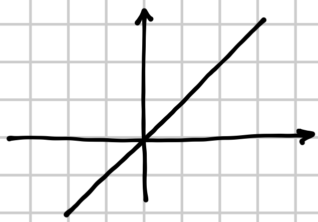
$$\left(f(x) = -f(-x) \right)$$



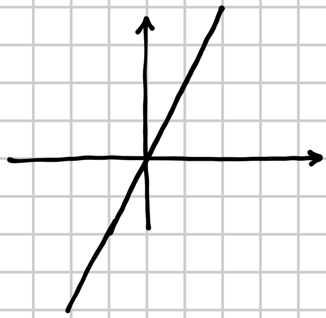
Il grafico è simmetrico rispetto all'origine $O(0,0)$

ESEMPI

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x$ è DISPARI



2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2x$ è DISPARI



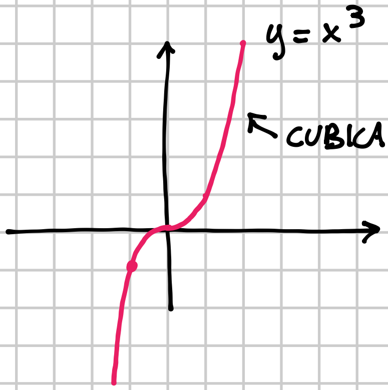
infatti

$f(-x) = -2x$

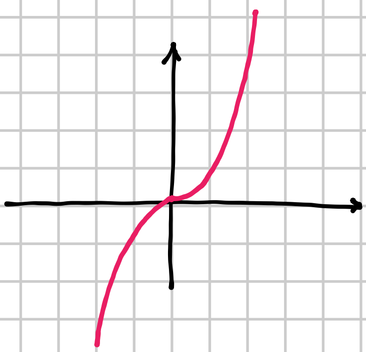
$$\underbrace{f(-x)}_{-2x} = -\underbrace{f(x)}_{2x}$$

3) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^3$ è DISPARI

In generale x^n con n dispari è dispari



4) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad h(x) = x|x|$ è DISPARI



$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ VARIE

- Il prodotto di 2 funzioni pari è pari

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad f, g \text{ PARI}$$

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

- Il prodotto di 2 funzioni dispari è pari

f, g DISPARI

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) \underset{f,\, g \text{ DISPARI}}{=} (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

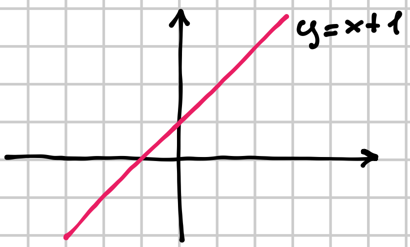
- Il prodotto di 2 funzioni una pari e l'altra dispari è dispari

f PARI $\quad g$ DISPARI

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -(f \cdot g)(x)$$

Esistono funzioni né pari né dispari? SÌ.

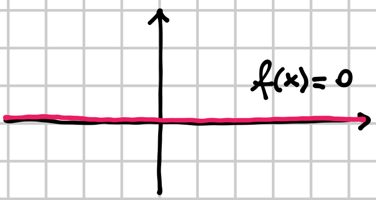
Ad esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x + 1$ non è né pari né dispari



$f(-x) = -x + 1$

$f(1) = 2 \qquad f(-1) = 0$ che è diverso da 2 e da -2

Esistono funzioni sia pari che dispari? SÌ. L'unica è la funzione nulla (su un intervallo simmetrico risp. a 0)



PARI $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

DISPARI $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\forall x \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$

261 $y = -3x^2 + |x|$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$f(-x) = -3(-x)^2 + |-x| = -3x^2 + |x| = f(x)$ è PARI

264 $y = \dfrac{x + x^3}{x^2}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(-x) = \dfrac{-x + (-x)^3}{(-x)^2} = \dfrac{-x - x^3}{x^2} = -\dfrac{x + x^3}{x^2} = -f(x)$ è DISPARI

263 $y = x^2 - x^3$ $\qquad D = \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^3 = x^2 + x^3 \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ né PARI né DISPARI

$f(1) = 0 \qquad f(-1) = 1 + 1 = 2 \neq \begin{cases} f(1) \\ -f(1) \end{cases}$