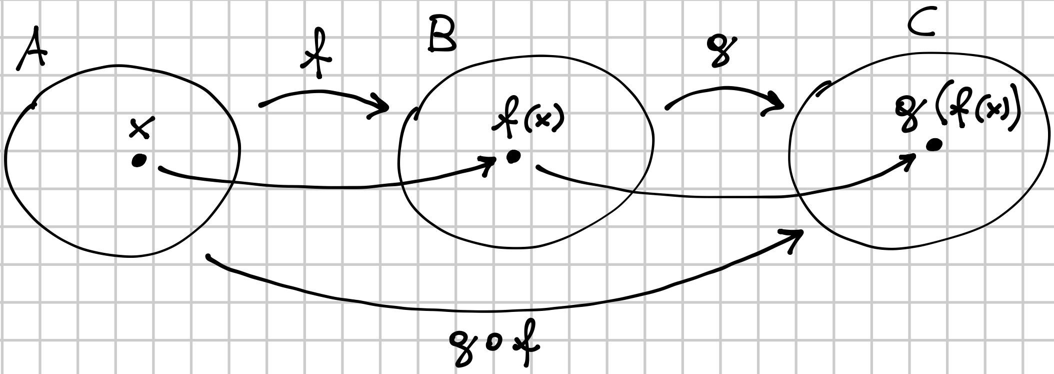
FUNZIONI COMPOSTE



$$f: A \to B \qquad g: B \to C$$

g composto f

(g dopo f)

$$g \circ f : A \to C \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x + 1$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

COMPORRE

285 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$.

$f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

Dato che l'insieme immagine di g <u>non</u> è incluso nel dominio di f, non è possibile comporre $f \circ g$. Per farlo devo restringere il dominio di g. Infatti, se ad es. partissi da $x = 0$, avrei che $g(0) = -1$ e non esisterebbe $f(g(0))$.

Allora impongo che sia $g(x) = x^2 - 1 \geq 0$, cioè $x \leq -1 \vee x \geq 1$

Dunque se

$g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

si ha:

$$f \circ g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$$

COMPORRE

281 $f(x) = 2 - x;$ $g(x) = 3x + 2.$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2 - (3x+2) = -3x$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2-x) = 3(2-x) + 2 = 6 - 3x + 2 = -3x + 8$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

282 $f(x) = 3x^2 - 2x;$ $g(x) = x - 3.$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 2x) = 3x^2 - 2x - 3$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = 3(x-3)^2 - 2(x-3) =$

$= 3(x^2 - 6x + 9) - 2x + 6 = 3x^2 - 18x + 27 - 2x + 6 =$

$= 3x^2 - 20x + 33$

283 $f(x) = x^3 - 1;$ $g(x) = 1 - 3x.$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-3x) = (1-3x)^3 - 1 =$

$= \cancel{1} - 9x + 27x^2 - 27x^3 - \cancel{1} = -27x^3 + 27x^2 - 9x$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = 1 - 3(x^3 - 1) = -3x^3 + 4$

284 $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^2 + 1$.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$

Così com'è la composizione non potrebbe avvenire:

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

DIVERSI

In realtà l'immagine di g è $[1, +\infty)$

basta cambiare così

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

perché 0 non è l'immagine di alcun elemento tramite g

$x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$

300 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $g(x) = x + |x|$,

a. determina il loro dominio A, B e la loro intersezione C;

b. stabilisci per quali $x \in C$ risulta $f(x) \geq g(x)$;

c. trova $f \circ g$ e $g \circ f$ e verifica che $f \circ g = g \circ f$ solo per $x = -2\sqrt{3}$.

$\left[\text{a) } A = [-4; 4], B = \mathbb{R}, C = A; \text{ b) } x \in \left[-4; \frac{4\sqrt{5}}{5}\right]; \text{ c) } f(g(x)) = \sqrt{16 - (x + |x|)^2}, g(f(x)) = 2\sqrt{16 - x^2}\right]$

a) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ $\quad 16 - x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq 16 \quad -4 \leq x \leq 4$

$A = \text{dom} f = [-4, 4]$

$g(x) = x + |x|$

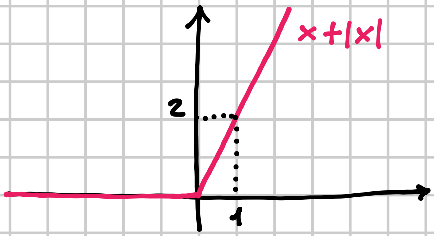
$B = \text{dom}\, g = \mathbb{R}$ $\qquad C = A \cap B = [-4,4] \cap \mathbb{R} = [-4,4]$

b) $f(x) \geq g(x) \quad x \in C$

$$\underbrace{\begin{cases} \sqrt{16-x^2} \geq x + |x| \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}}_{x \in C} \qquad ① \begin{cases} x + |x| < 0 \\ 16 - x^2 \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases} \vee ② \begin{cases} x + |x| \geq 0 \\ 16 - x^2 \geq (x + |x|)^2 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Osserviamo che $x + |x| \geq 0 \ \forall x$. Infatti esso è uguale a

$$\begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Il sistema ① è IMPOSSIBILE

Il sistema ② è invece

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq x^2 + 2x|x| + x^2 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 2x|x| - 16 \leq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x^2 - 16 \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x^2 - 2x^2 - 16 \leq 0 \\ -4 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+2x^2-16 \le 0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x^2-2x^2-16 \le 0 \\ -4 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 \le 16 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 \le 16 \\ -4 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{5}} \le x \le \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \vee \begin{cases} -4 \le x \le 4 \\ -4 \le x < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le x \le \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad -4 \le x < 0 \quad \Rightarrow \quad -4 \le x \le \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$x \in \left[-4, \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$$

c) SENZA PREOCCUPARCI DEI DOMINI

$f(x) = \sqrt{16-x^2} \qquad g(x) = x+|x|$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+|x|) = \sqrt{16-(x+|x|)^2}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{16-x^2}\right) = \sqrt{16-x^2} + \left|\sqrt{16-x^2}\right| = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{16-x^2} =$

$= 2\sqrt{16-x^2}$

$$\sqrt{16-(x+|x|)^2} = 2\sqrt{16-x^2}$$

elevo al quadrato

$$16-(x+|x|)^2 = 4(16-x^2)$$

$$16-(x^2+x^2+2x|x|) = 64-4x^2$$

$$16-2x^2-2x|x| = 64-4x^2$$

$$2x^2-2x|x| = 48$$

$$2x^2 - 2x|x| = 48$$

$$x^2 - x|x| = 24$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x^2 = 24 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x^2 = 24 \end{cases}$$

$0 = 24$

IMPOSSIBILE

$2x^2 = 24$

$x^2 = 12$

$x = \pm\sqrt{12}$ → $x = \sqrt{12}$ N.ACC. ; $x = -\sqrt{12}$

L'unica candidata soluzione è $-\sqrt{12}$, da controllare sostituendo nel testo dell'equazione di partenza

$$\sqrt{16 - (x + |x|)^2} = 2\sqrt{16 - x^2} \qquad x = -\sqrt{12}$$

$$\sqrt{16 - \underbrace{(-\sqrt{12} + \sqrt{12})^2}_{0}} = 2\sqrt{16 - 12}$$

$$\sqrt{16} = 2\sqrt{4}$$

$4 = 4$ <u>VERA</u>!

$$\boxed{-\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \text{ è SOLUZIONE}}$$