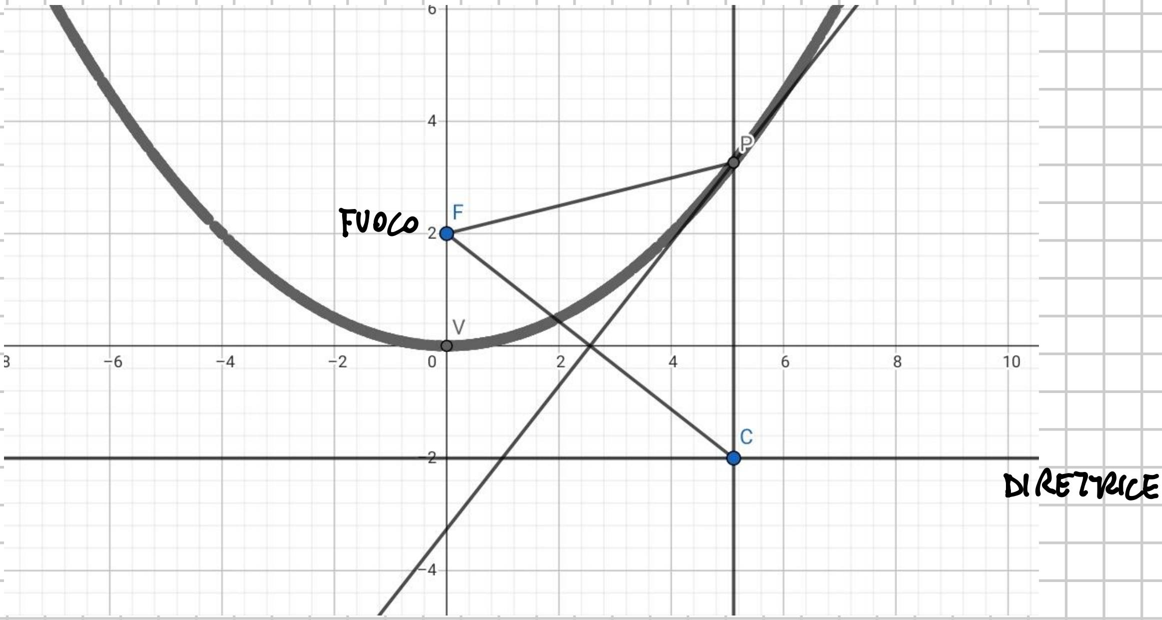
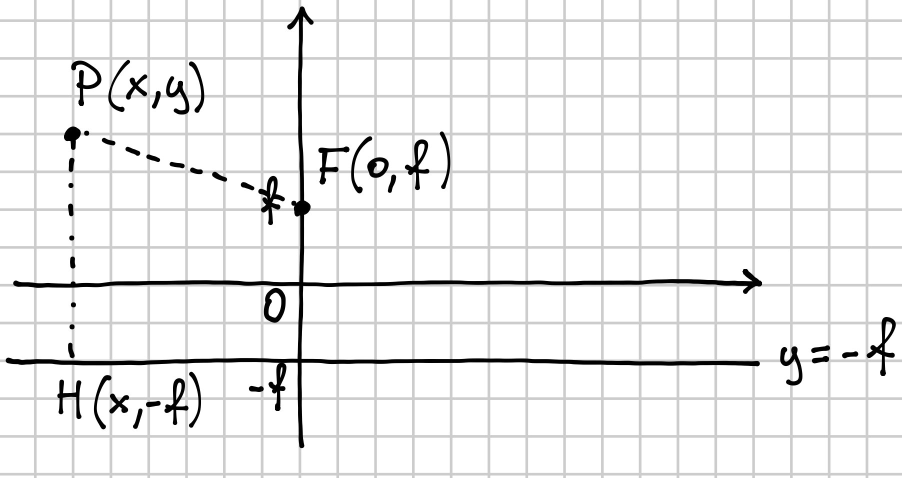
LA PARABOLA

Dati un punto F (detto FUOCO) e una retta d (detta DIRETTRICE) ($F \notin d$) nel piano, si dice <u>PARABOLA di fuoco F e direttrice d</u> il luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.



RICAVIAMO L'EQUAZIONE DELLA PARABOLA



$f \neq 0$ FUOCO $F(0,f)$

DIRETRICE $y=-f$

$P(x,y)$ appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice d se e solo se

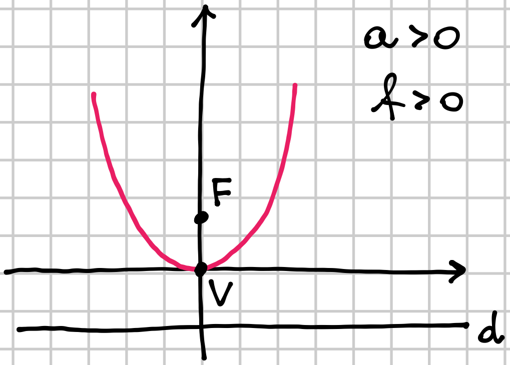
$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-f)^2} = |y+f| \xrightarrow{\text{elevo al quadrato}} x^2+\cancel{y^2}+\cancel{f^2}-2fy = \cancel{y^2}+\cancel{f^2}+2fy$$

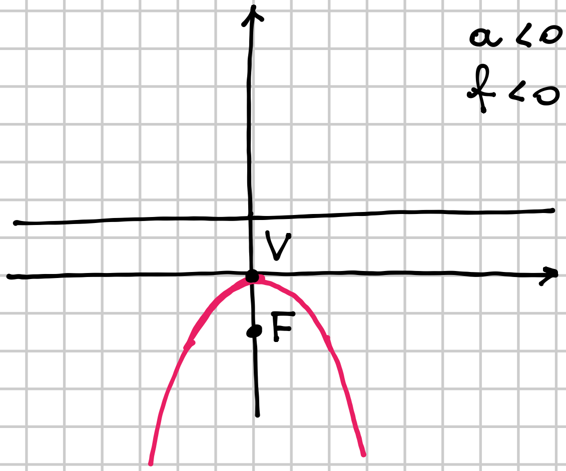
$$x^2 = 4fy \Rightarrow y = \frac{1}{4f}x^2 \qquad a = \frac{1}{4f} \qquad \boxed{y = ax^2}$$

$y = ax^2$

$a > 0$
$f > 0$



$a < 0$
$f < 0$



$a = \frac{1}{4f}$

$V(0,0)$
VERTICE

Trovare vertice, fuoco e direttrice della parabola $y = \frac{1}{12}x^2$

$a = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{4f} = \frac{1}{12} \Rightarrow f = 3$

$V(0,0)$ $F(0,3)$ FUOCO $y = -3$ DIRETTRICE $x = 0$ ASSE DI SIMMETRIA

Determina l'eq. della parabola di fuoco F e direttrice d

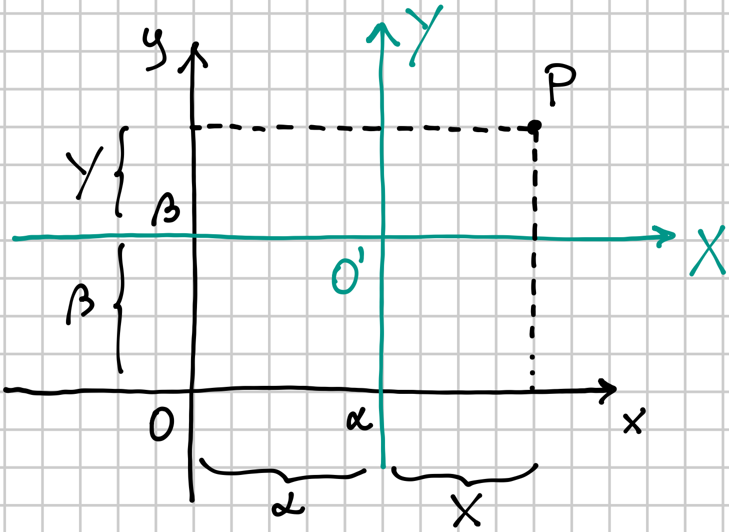
- $F(0,5)$ $d: y = -5$ $\Rightarrow f = 5$

$y = ax^2$
↑
devo trovare a

$a = \frac{1}{4f} \Rightarrow a = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$

$$\boxed{y = \frac{1}{20}x^2}$$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE



2 sistemi di riferimento con gli assi paralleli

Oxy $\quad$ $O'XY$

$O'(\alpha, \beta)$ nel rif. xy

Nel sistema di rif. xy le coordinate di P sono

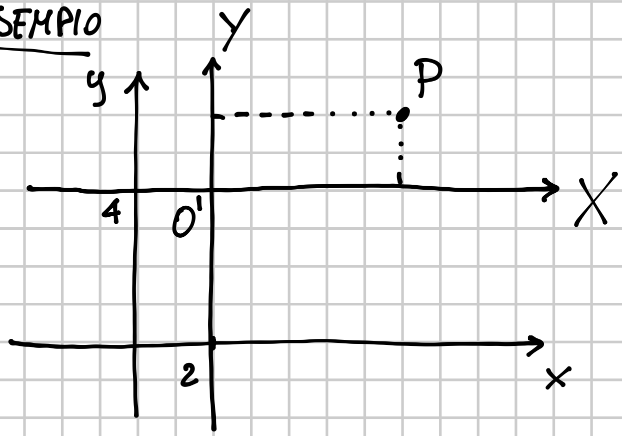
$P(X, Y)$ nel rif. XY

$P(x, y)$ nel rif. xy

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

LEGAMI FRA I 2 SISTEMI DI RIFERIMENTO

ESEMPIO



$O'(2, 4)$ nel rif. xy

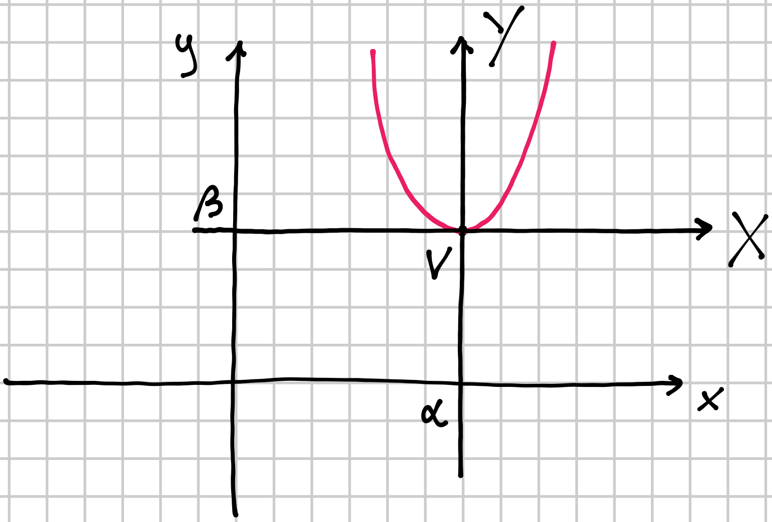
$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$$

Nel rif. XY si ha che $P(5, 2)$. Quali sono le coordinate di P nel rif. xy?

$$\begin{cases} X = 5 + 2 = 7 \\ y = 2 + 4 = 6 \end{cases}$$

$P(7, 6)$ nel rif. xy

PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA // ASSE y IN POSIZIONE GENERICA



$V(\alpha, \beta)$ nel rif. xy

Nel rif. XY l'equazione della parabola è

$$Y = aX^2$$

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

Per trovare l'eq. della parabola nel rif. xy sostituisco a $Y = aX^2$ le formule $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$

$$y - \beta = a(x-\alpha)^2$$

$$y - \beta = a(x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x)$$

$$y = ax^2 \underbrace{- 2\alpha a}_{b} x + \underbrace{a\alpha^2 + \beta}_{c}$$

$b = -2\alpha a$

$c = a\alpha^2 + \beta$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

$V(\alpha, \beta)$ $\quad b = -2\alpha a \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$

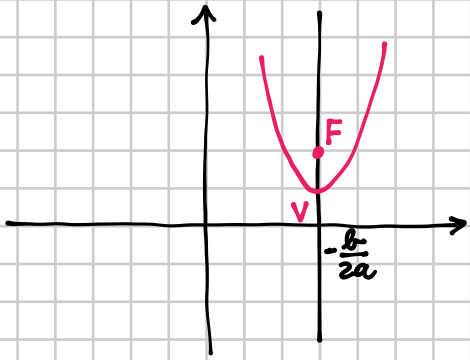
$$\beta = c - a\alpha^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} = c - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

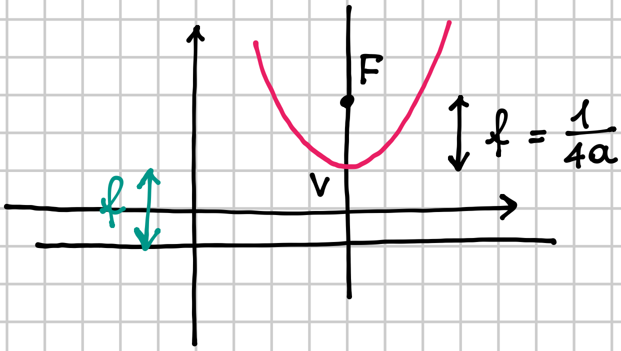
$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

ASSE DI SIMMETRIA

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$



FUOCO E DIRETTRICE



$$F\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a} + f\right)$$

$$-\frac{\Delta}{4a} + f = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}$$

$$\boxed{F\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{1-\Delta}{4a}\right)} \quad \text{FUOCO}$$

per la direttrice

$$y = y_V - f = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \implies \boxed{y = -\frac{1+\Delta}{4a}} \quad \text{EQ. DIRETTRICE}$$

y_V: ORDINATA DEL VERTICE

Trovare l'eq. della parabola di fuoco F e direttrice d

32 $F(-2; -1)$, $\quad d\colon y = -3$. $\quad \left[y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1\right]$

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -2 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = -1 \\ -\dfrac{1+\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4a \\ 1 - \Delta = -4a \\ 1 + \Delta = 12a \end{cases}$$

$$2 = 8a \implies a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = 4 \cdot \dfrac{1}{4} = 1 \\ \Delta = 12a - 1 = 12 \cdot \dfrac{1}{4} - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$c = \frac{b^2 - \Delta}{4a} = \frac{1-2}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1}$$

ALTRO MODO (con la definizione)

$F(-2,-1)$ $\qquad y=-3$ $\qquad P(x,y)$ punto generico della parabola

$$\overline{PF} = \underbrace{Pd}_{\text{distanza di P dalla direttrice}}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} = |y+3|$$

$$x^2+4+4x+\cancel{y^2}+1+2y = \cancel{y^2}+9+6y$$

$$x^2+4x-4=4y \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}x^2+x-1}$$

Trovare l'eq. delle parabole con fuoco in F passanti per P
↘ asse di simmetria // asse y

105 $F(-2,1)$ $\qquad P(0,1)$ $\qquad \left[y=\frac{1}{4}x^2+x+1;\ y=-\frac{1}{4}x^2-x+1\right]$

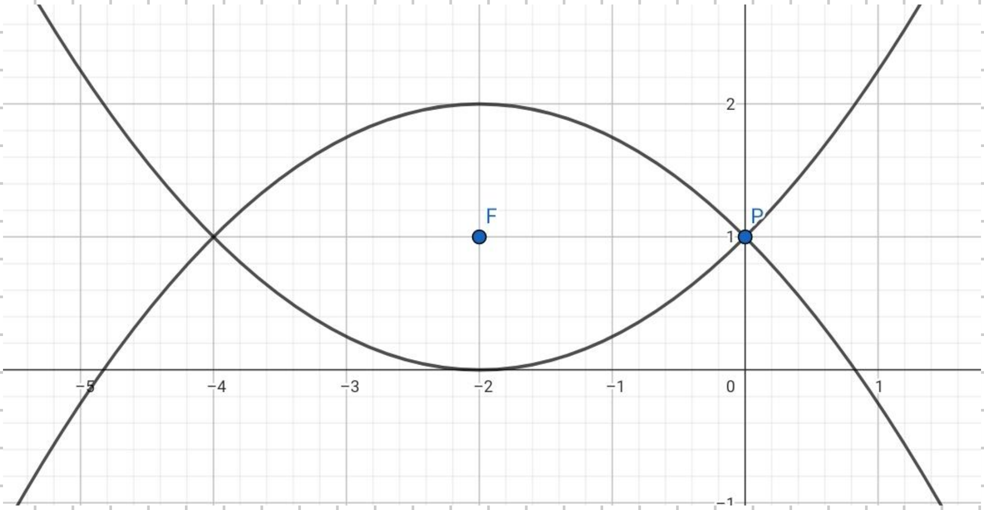
$y=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a}=1 \end{cases}\text{ COORDINATE DEL FUOCO}$$
$$1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \text{ PASSAGGIO PER P}$$

$$\begin{cases} b=4a \\ 1-b^2+4ac=4a \\ c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=4a \\ 1-b^2+\cancel{b}=\cancel{b} \\ c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=4a \\ b^2=1 \\ c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=4a \\ b=\pm 1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{4}x^2+x+1 \qquad y=-\frac{1}{4}x^2-x+1$$



F
P
2
1
−1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1