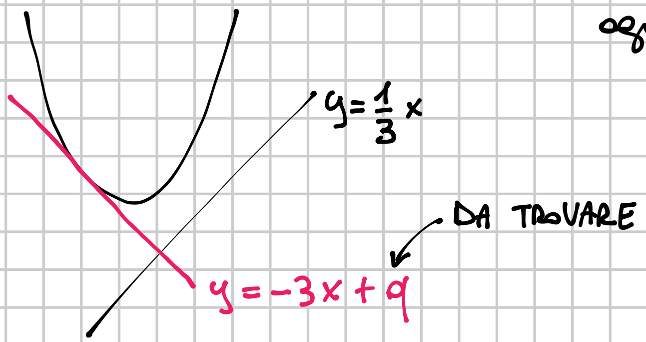
252 Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = 3x^2 - 4x$ e perpendicolare alla retta di equazione $x - 3y = 0$, poi determina il punto di tangenza.

$$\left[y = -3x - \frac{1}{12}; \left(\frac{1}{6}; -\frac{7}{12}\right)\right]$$

$x - 3y = 0 \implies y = \frac{1}{3}x$ coeff. angolare $m = \frac{1}{3}$

$\Downarrow$

ogni retta $\perp$ a questa ha coeff. ang. $m' = -3$



$$\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y = -3x + q \end{cases}$$

voglio che abbia 1 sola soluzione

$$3x^2 - 4x = -3x + q$$

$$3x^2 - 4x + 3x - q = 0 \qquad 3x^2 - x - q = 0$$

IMPONGO $\Delta = 0$

$$(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-q) = 0$$

$$1 + 12q = 0 \implies q = -\frac{1}{12}$$

$$\boxed{y = -3x - \frac{1}{12}}$$

per trovare il punto di tangenza

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y = -3x - \frac{1}{12} \end{cases} \implies 3x^2 - 4x = -3x - \frac{1}{12} \qquad 3x^2 - x + \frac{1}{12} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 0$$

$$x = \frac{1}{6} \leadsto y = -\frac{3}{6} - \frac{1}{12} = -\frac{7}{12}$$

$$\boxed{T\left(\frac{1}{6}, -\frac{7}{12}\right)}$$

260 È data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$. Dopo aver determinato le equazioni delle rette a essa tangenti uscenti dal punto $C(1; -8)$, trova le coordinate dei punti di intersezione A e B delle tangenti con l'asse x. Calcola l'area del triangolo ABC. $[y = 4x - 12; y = -4x - 4; A(3; 0); B(-1; 0); 16]$

$C(1,-8)$ (esterno alla parabola)

$$\begin{cases} y+8 = m(x-1) \\ y = x^2-2x-3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = mx - m - 8 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = mx - m - 8$$

$$x^2 - 2x - mx - 3 + m + 8 = 0$$

$$x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \quad (m+2)^2 - 4(m+5) = 0$$

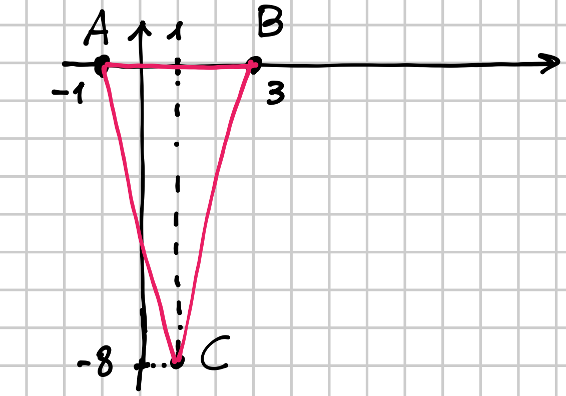
$$m^2 + \cancel{4m} + 4 - \cancel{4m} - 20 = 0$$

$$m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

1ª tangente $m = -4 \rightarrow y = -4x - 4$

2ª tangente $m = 4 \rightarrow y = 4x - 12$

$A \begin{cases} y = -4x - 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(-1,0) \qquad B \begin{cases} y = 4x - 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad B(3,0)$



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$$

264 Scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla parabola di equazione $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ e passanti per $P(-2; 3)$. Condotta poi la tangente t_3 nel punto della parabola di ordinata 1, trova l'area del triangolo definito da t_1, t_2, t_3.

$\left[x=-2; x-2y+8=0; 2x+2y+1=0; \text{area}=\frac{3}{4}\right]$

$P(-2,3)$ $\qquad$ $y-3 = m(x+2)$

METODO 1

$$\begin{cases} y = mx + 2m + 3 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 2y \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}(mx+2m+3)^2 - 2(mx+2m+3)$$

METODO 2

$$\begin{cases} x+2 = \frac{1}{m}(y-3) \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 2y \end{cases}$$

METODO 3

$$\begin{cases} y = mx + 2m + 3 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 2y \end{cases} \Rightarrow y = m\left(\frac{1}{2}y^2 - 2y\right) + 2m + 3$$

$$y = \frac{m}{2}y^2 - 2my + 2m + 3$$

$$\frac{m}{2}y^2 - 2my - y + 2m + 3 = 0$$

$$\frac{m}{2}y^2 - (2m+1)y + 2m + 3 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2m+1)^2 - \cancel{4}^{\,2} \cdot \frac{m}{\cancel{2}} \cdot (2m+3) = 0$$

$$\cancel{4m^2} + 1 + 4m - \cancel{4m^2} - 6m = 0 \qquad -2m = -1 \qquad m = \frac{1}{2}$$

SICCOME È DI 1° GRADO, L'ALTRA TANGENTE È QUELLA ESCLUSA DAL FASCIO

retta per $P(-2,3)$ verticale

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1 + 3 \qquad \underbrace{\boxed{y = \frac{1}{2}x + 4}}_{t_1} \qquad \underbrace{\boxed{x = -2}}_{t_2}$$

t_3 : tangente alla parabola $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ nel punto di ordinata 1

$$y = 1 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$Q\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$y - 1 = m\left(x + \frac{3}{2}\right) \text{ fascio per } Q$$

$$\begin{cases} y - 1 = m\left(x + \frac{3}{2}\right) \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 2y \end{cases} \qquad y - 1 = m\left(\frac{1}{2}y^2 - 2y + \frac{3}{2}\right)$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}my^2 - 2my + \frac{3}{2}m$$

$$\frac{1}{2}my^2 - 2my - y + \frac{3}{2}m + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}my^2 - (2m + 1)y + \frac{3}{2}m + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \qquad (2m+1)^2 - \overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}m\left(\frac{3}{2}m + 1\right) = 0$$

$$4m^2 + 1 + 4m - 3m^2 - 2m = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \qquad (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$y - 1 = -1\cdot\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

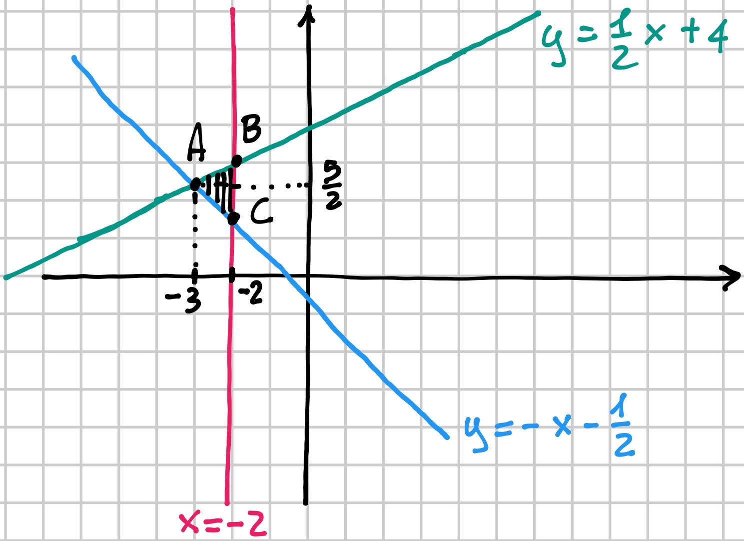
$$y = -x - \frac{3}{2} + 1$$

$$\boxed{y = -x - \frac{1}{2}} \text{ tangente } t_3$$

$t_1: \; y = \frac{1}{2}x + 4$

$t_2: \; x = -2$

$t_3: \; y = -x - \frac{1}{2}$



$$A \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ y = -x - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{2}x + 4 = -x - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}x + x = -4 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{9}{2} \implies x = -3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \qquad A\left(-3, \frac{5}{2}\right)$$

$$B \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 4 \\ x = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -1 + 4 = 3 \\ x = -2 \end{cases} \qquad B(-2, 3)$$

$$C \begin{cases} y = -x - \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ x = -2 \end{cases} \qquad C\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

ALTEZZA = (DISTANZA DI A DALLA RETTA $x = -2$) = 1

BASE $\overline{BC} = |y_B - y_C| = \left|3 - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

AREA $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{3}{4}}$