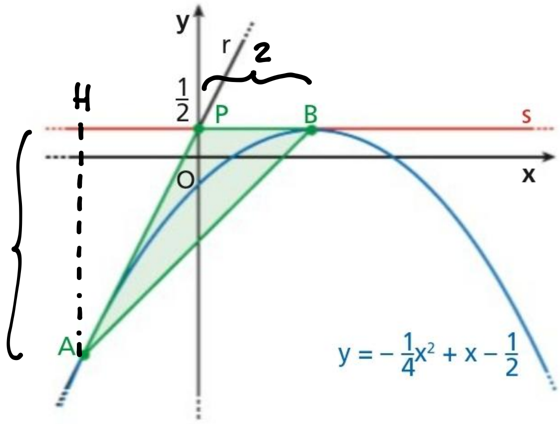
258 Scrivi le equazioni delle rette r e s passanti per P e tangenti alla parabola utilizzando le informazioni della figura; calcola l'area del triangolo ABP.

$$\left[y = 2x + \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{2};\ 4\right]$$

$\frac{7}{2} + \frac{1}{2}$



PARABOLA $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}$

$$x_V = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$y_V = -\frac{1}{4}2^2 + 2 - \frac{1}{2} = -1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

come da disegno

$s:\ y = \frac{1}{2}$

La retta r è tangente alla parabola passante per il punto $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$y - \frac{1}{2} = m(x - 0)$$

$$\begin{cases} y = mx + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} = mx + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - mx + x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \qquad (1-m)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)(-1) = 0$$

$$\cancel{1} + m^2 - 2m - \cancel{1} = 0$$

$$m(m - 2) = 0 \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s:\ y = \frac{1}{2} \\ r:\ y = 2x + \frac{1}{2} \end{array}}$$

Troviamo A, punto di tangenza

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} \\ y = 2x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2} = 2x + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x^2 - x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \end{cases} \qquad A\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$$

AREA TRIANGOLO ABP $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \boxed{4}$

METODO PER CALCOLARE L'AREA DI UN TRIANGOLO DATI I VERTICI

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

$C(x_C, y_C)$

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} =$$

DETERMINANTE

$$= \begin{matrix} x_A & y_A & 1 & x_A & y_A \\ x_B & y_B & 1 & x_B & y_B \\ x_C & y_C & 1 & x_C & y_C \end{matrix} =$$

$$= x_A \cdot y_B \cdot 1 + y_A \cdot 1 \cdot x_C + 1 \cdot x_B \cdot y_C +$$

$$-(1 \cdot y_B \cdot x_C + x_A \cdot 1 \cdot y_C + y_A \cdot x_B \cdot 1) = det$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|det|$$

ES.

$A\left(-2, -\frac{7}{2}\right)$

$B\left(2, \frac{1}{2}\right)$

$P\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\left|\begin{matrix} -2 & -\frac{7}{2} & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & -\frac{7}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \cdot 2 \cdot 1\right) =$$

$$= -1 + 1 - (-1 - 7) = 8$$

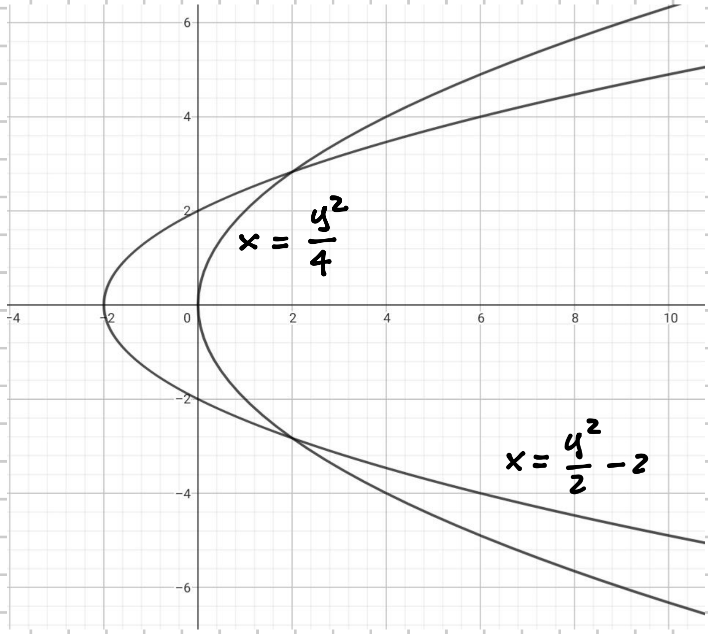
$$\mathcal{A}_{ABP} = \frac{1}{2}|det| = \frac{1}{2}|8| = 4$$

261 Trova le equazioni delle rette tangenti comuni alle due parabole di equazioni $x = \frac{y^2}{2} - 2$ e $x = \frac{y^2}{4}$ e determina l'area del quadrilatero che ha per vertici i punti di tangenza.

$[x - 2y + 4 = 0;\ x + 2y + 4 = 0;\ 24]$

In 4 passi

1. Disegna le due parabole e considera una retta generica di equazione $y = mx + q$ non parallela all'asse y.
2. Imponi la condizione di tangenza con ciascuna delle due parabole: ottieni due equazioni in m e q.
3. Poni a sistema le due condizioni e risolvilo.
4. Determina i punti di tangenza e calcola l'area richiesta.



$$\begin{cases} y = mx + q \\ x = \frac{y^2}{2} - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx + q \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases}$$

$$y = m\left(\frac{y^2}{2} - 2\right) + q \qquad y = m\frac{y^2}{4} + q$$

$$\frac{m}{2}y^2 - y - 2m + q = 0 \qquad \frac{m}{4}y^2 - y + q = 0$$

$$\Delta = 0 \qquad \Delta = 0$$

$$1 - 4 \cdot \frac{m}{2} \cdot (-2m + q) = 0 \qquad 1 - 4 \cdot \frac{m}{4} \cdot q = 0$$

$$1 - 2m(-2m + q) = 0 \qquad 1 - mq = 0$$

$$4m^2 - 2qm + 1 = 0 \qquad mq = 1$$

$$\begin{cases} 4m^2 - 2qm + 1 = 0 \\ mq = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4m^2 - 2 + 1 = 0 \\ mq = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4m^2 = 1 \\ mq = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} m = \pm\frac{1}{2} \\ mq = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{m} = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{m} = 2 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2 \qquad y = \frac{1}{2}x + 2$$

le 2 tangenti

Trovo i punti di intersezione (tangenza):

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x = \frac{y^2}{2} - 2 \end{cases} \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 2\right) + 2$$

$$y = \frac{1}{4}y^2 - 1 + 2 \qquad \frac{1}{4}y^2 - y + 1 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 = 0$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad A(0,2)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x = \frac{y^2}{4} \end{cases} \qquad y = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{4} + 2$$

$$y = \frac{y^2}{8} + 2 \qquad \frac{y^2}{8} - y + 2 = 0$$

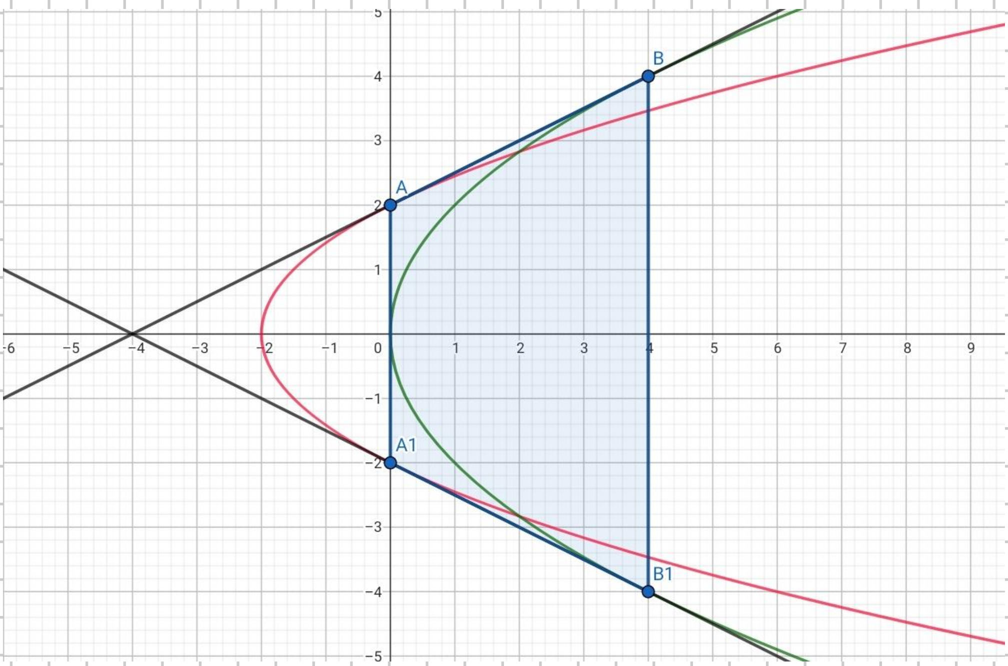
$$y^2 - 8y + 16 = 0$$

$$(y-4)^2 = 0 \qquad \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases} \qquad B(4,4)$$

SONO I SIMMETRICI RISP. ALL'ASSE X

$A(0,2)$ $A'(0,-2)$ $\overline{AA'} = 4$ $h = 4$ (altezza)

$B(4,4)$ $B'(4,-4)$ $\overline{BB'} = 8$



$$\mathcal{A}_{ABB'A'} = \frac{1}{2}(8+4) \cdot 4 =$$

$$= \boxed{24}$$

270 Trova per quale valore di $k > 2$ il punto $Q(k-2; 1-k)$ appartiene alla parabola $y = -3x^2 + 2x - 1$ e scrivi l'equazione della retta passante per Q tangente alla parabola. $[k = 3; y = -4x + 2]$

$Q(k-2, 1-k) \qquad y = -3x^2 + 2x - 1$

$$1-k = -3(k-2)^2 + 2(k-2) - 1$$

$$1-k = -3(k^2+4-4k) + 2k - 4 - 1$$

$$1-k = -3k^2 - 12 + 12k + 2k - 5$$

$$3k^2 - 15k + 18 = 0 \qquad k^2 - 5k + 6 = 0$$

$(k-3)(k-2) = 0$ → $k = 2$ N.ACC. $(k>2)$; $k = 3$

$Q(1, -2)$

$$\begin{cases} y+2 = m(x-1) \\ y = -3x^2 + 2x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx - m - 2 \\ y = -3x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

$$mx - m - 2 = -3x^2 + 2x - 1$$

$$3x^2 + mx - 2x - 2 + 1 - m = 0$$

$$3x^2 + (m-2)x - 1 - m = 0$$

$$\Delta = 0 \qquad (m-2)^2 - 12(-1-m) = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 + 12 + 12m = 0$$

$$m^2 + 8m + 16 = 0 \qquad (m+4)^2 = 0 \qquad m = -4$$

$$\boxed{y = -4x + 2}$$

367 Scrivi l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(1; -1)$ e tangente alla retta di equazione $y = -2x + 5$.

$[y = -x^2 + 4x - 4;\ y = -9x^2 + 28x - 20]$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$A(2,0) \rightarrow$, $B(1,-1) \rightarrow$ $\begin{cases} 0 = 4a + 2b + c \\ -1 = a + b + c \end{cases}$ $\begin{cases} c = -4a - 2b \\ -1 = a + b - 4a - 2b \end{cases}$

$$\begin{cases} // \\ -1 = -3a - b \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -4a - 2(1-3a) = -4a - 2 + 6a \\ b = 1 - 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2a - 2 \\ b = 1 - 3a \end{cases}$$

$$y = ax^2 + \underbrace{(1-3a)}_{b}x + \underbrace{2a-2}_{c}$$ $\leftarrow$ DA TROVARE a con la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = ax^2 + (1-3a)x + 2a - 2 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

$$ax^2 + (1-3a)x + 2a - 2 = -2x + 5$$

$$ax^2 + (1-3a)x + 2x + 2a - 2 - 5 = 0$$

$$ax^2 + (1-3a+2)x + 2a - 7 = 0$$

$$ax^2 + (3-3a)x + 2a - 7 = 0$$

$$\Delta = 0 \qquad (3-3a)^2 - 4a(2a-7) = 0$$

$$(3-3a)^2-4a(2a-7)=0$$

$$9+9a^2-18a-8a^2+28a=0$$

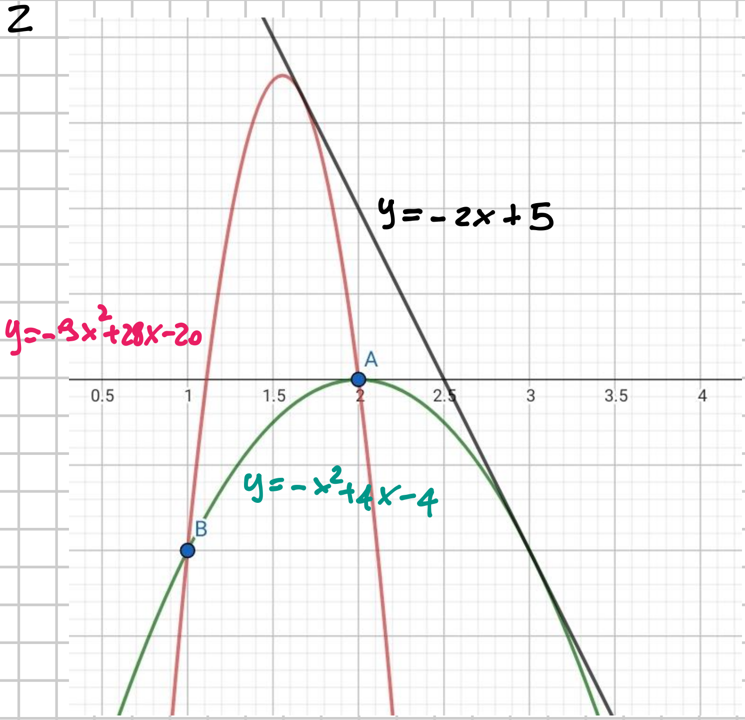
$$a^2+10a+9=0$$

$$(a+1)(a+9)=0 \quad \begin{cases} a=-1 \\ a=-9 \end{cases}$$

$$y=ax^2+(1-3a)x+2a-2$$

$a=-1 \rightarrow$ $\boxed{y=-x^2+4x-4}$

$a=-9 \rightarrow$ $\boxed{y=-9x^2+28x-20}$



368 Determina l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

di vertice $V(0; -2)$ e tangente alla retta di equazione $y = 6x - 5$.

$[y = 3x^2 - 2]$

$V(0,-2) \Rightarrow -2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ (passaggio per V) $\Rightarrow c = -2$

$-\frac{b}{2a} = 0$ (1^a coordinata del vertice) $\Rightarrow b = 0$

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = ax^2 - 2$

$$\begin{cases} y = ax^2 - 2 \\ y = 6x - 5 \end{cases}$$

$ax^2 - 2 = 6x - 5$

$ax^2 - 6x + 3 = 0$

$\Delta = 0 \qquad 36 - 4 \cdot 3 \cdot a = 0$

$36 - 12a = 0 \Rightarrow a = 3$

$$\boxed{y = 3x^2 - 2}$$