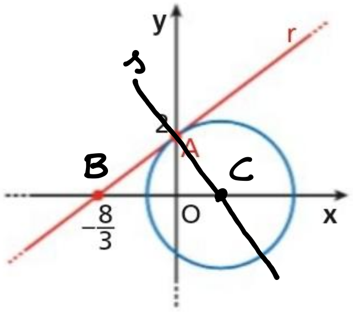
60 Scrivi l'equazione della circonferenza della figura che è tangente nel punto A alla retta r e ha il centro sulla retta di equazione $y=-2x+3$.



a. Tra le rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante trova quelle che, intersecando la circonferenza, determinano una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

b. Trova il perimetro del rettangolo con i vertici nei punti di intersezione della circonferenza con le rette trovate nel punto **a**.

c. Da $P(4;-5)$ conduci le tangenti alla circonferenza, trova le loro equazioni, le coordinate dei punti di tangenza E e F e il perimetro di EFP.

$\left[x^2+y^2-3x-4=0;\ \text{a) } y=-x+4,\ y=-x-1;\ \text{b) } 10\sqrt{2};\ \text{c) } y=-\frac{3}{4}x-2,\ x=4,\ E(0;-2),\ F(4;0),\ 2(5+\sqrt{5})\right]$

centro $C \in y=-2x+3$ $\qquad C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$-\frac{b}{2} = -2\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+3$ 1ª equazione

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$A(0,2) \in$ circonf. $\Rightarrow$ $4+2b+c=0$ 2ª equazione

retta AB $\quad A(0,2)\quad B\left(-\frac{8}{3},0\right) \quad m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{\frac{8}{3}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x+2$

$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=\frac{3}{4}x+2 \end{cases} \Rightarrow \Delta=0$ mi dà la 3ª equazione

<u>METODO ALTERNATIVO (ANDREA)</u>

Trovo la retta per $A(0,2)$ perpendicolare alla retta tangente $y=\frac{3}{4}x+2$

$y-2=-\frac{4}{3}(x-0) \qquad y=-\frac{4}{3}x+2$ retta s, CONTIENE IL CENTRO C

$C \begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+2 \\ y=-2x+3 \end{cases}$ $\qquad -2x+3=-\frac{4}{3}x+2$

$\frac{4}{3}x-2x=-3+2$

$-\frac{2}{3}x=-1$

$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-2\cdot\frac{3}{2}+3=0 \end{cases}$ $\qquad C\left(\frac{3}{2},0\right)$

Il raggio lo trovo con la distanza $\overline{CA}$

$C\left(\frac{3}{2},0\right) \qquad A(0,2)$

$$r = \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

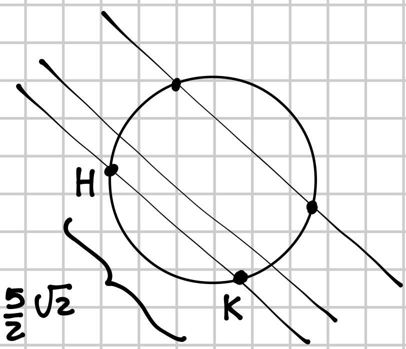
circonf.: $$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{9}{4} - 3x + y^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2+y^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}=0$$

$$\boxed{x^2+y^2-3x-4=0}$$

a) $y=-x+K$ rette parallele alla bisettrice II-IV quadrante



$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-4=0 \\ y=-x+K \end{cases}$$

$$x^2+(-x+K)^2-3x-4=0$$

$$x^2+x^2+K^2-2Kx-3x-4=0$$

$$2x^2-(2K+3)x+K^2-4=0$$

$$\Delta = (2K+3)^2-8(K^2-4) =$$

$$= 4K^2+9+12K-8K^2+32 =$$

$$= -4K^2+12K+41$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2K+3\pm\sqrt{\Delta}}{4} \\[2ex] y = -\dfrac{2K+3\pm\sqrt{\Delta}}{4}+K \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{2k+3 \pm \sqrt{\Delta}}{4} \\ \\ y = -\dfrac{2k+3 \pm \sqrt{\Delta}}{4} + k \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2k+3 \pm \sqrt{\Delta}}{4} \\ \\ y = \dfrac{-2k-3 \mp \sqrt{\Delta} + 4k}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2k+3 \pm \sqrt{\Delta}}{4} \\ \\ y = \dfrac{2k-3 \mp \sqrt{\Delta}}{4} \end{cases}$$

$$H\left(\frac{2k+3+\sqrt{\Delta}}{4}, \frac{2k-3-\sqrt{\Delta}}{4}\right) \qquad \Delta = -4k^2 + 12k + 41$$

$$K\left(\frac{2k+3-\sqrt{\Delta}}{4}, \frac{2k-3+\sqrt{\Delta}}{4}\right)$$

$$\overline{HK} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \iff \overline{HK}^2 = \frac{25}{2}$$

$$\left(\frac{2k+3+\sqrt{\Delta}}{4} - \frac{2k+3-\sqrt{\Delta}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2k-3-\sqrt{\Delta}}{4} - \frac{2k-3+\sqrt{\Delta}}{4}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\left(\frac{\cancel{2k}\cancel{+3}+\sqrt{\Delta}\cancel{-2k}\cancel{-3}+\sqrt{\Delta}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\cancel{2k}\cancel{-3}-\sqrt{\Delta}\cancel{-2k}\cancel{+3}-\sqrt{\Delta}}{4}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{4}_2}\right)^2 + \left(-\frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{4}_2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$\frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4} = \frac{25}{2} \Rightarrow \Delta = 25$$

$$\downarrow$$

$$-4k^2 + 12k + 41 = 25$$

$$4k^2 - 12k - 16 = 0$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0 \qquad (k-4)(k+1) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow k = 4 \Rightarrow \boxed{y = -x + 4} \\ \searrow k = -1 \Rightarrow \boxed{y = -x - 1} \end{matrix}$$

b)
$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-4=0 \\ y=-x+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x^2+16-8x-3x-4=0 \\ y=-x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-11x+12=0 \\ y=-x+4 \end{cases} \qquad \Delta = 121-96=25 \qquad x=\frac{11\pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 4 \end{cases}$$

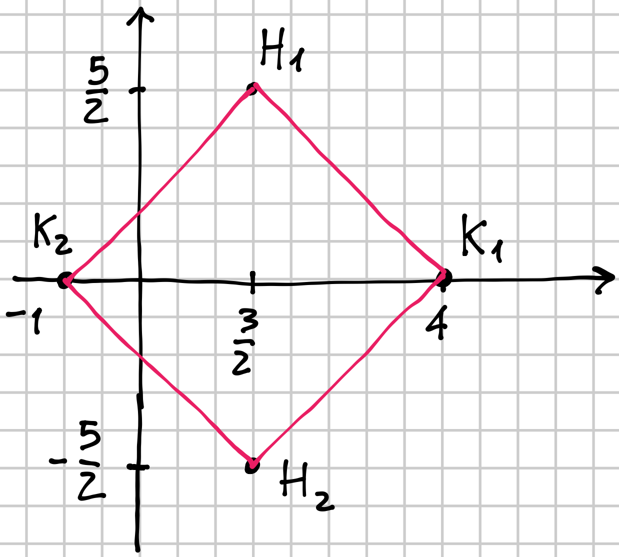
$$H_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \qquad K_1(4,0)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x-4=0 \\ y=-x-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+x^2+1+2x-3x-4=0 \\ // \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2-x-3=0 \\ // \end{cases}$$

$$\Delta = 1+24=25$$

$$x=\frac{1\pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$H_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) \qquad K_2(-1,0)$$



$$\overline{H_1K_1} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-4\right)^2+\left(\frac{5}{2}-0\right)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

COME OVVIO perché le rette formano proprio corde lunghe $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

$$\overline{H_1K_2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(\frac{5}{2}-0\right)^2} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$2P_{H_1K_1H_2K_2} = 4\cdot\frac{5}{2}\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

c) $P(4,-5)$ $\qquad x^2+y^2-3x-4=0$

$$C\left(\frac{3}{2},0\right) \qquad r=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$y+5=m(x-4)$$

$$y+5=mx-4m$$

$$mx-y-5-4m=0$$

$$\frac{\left|\frac{3}{2}m-0-5-4m\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{5}{2}$$

$$\left|-\frac{5}{2}m-5\right|=\frac{5}{2}\sqrt{m^2+1}$$

$$\cancel{\frac{25}{4}m^2}+25+25m=\cancel{\frac{25}{4}m^2}+\frac{25}{4}$$

$$1+m=\frac{1}{4} \qquad m=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$$

SICCOME SI È ABBASSATA DI GRADO, L'ALTRA RETTA È QUELLA ESCLUSA DAL FASCIO

$$x=4$$

$$y+5=-\frac{3}{4}(x-4)$$

$$y=-\frac{3}{4}x+3-5$$

$$y=-\frac{3}{4}x-2$$

PUNTI DI TANGENZA

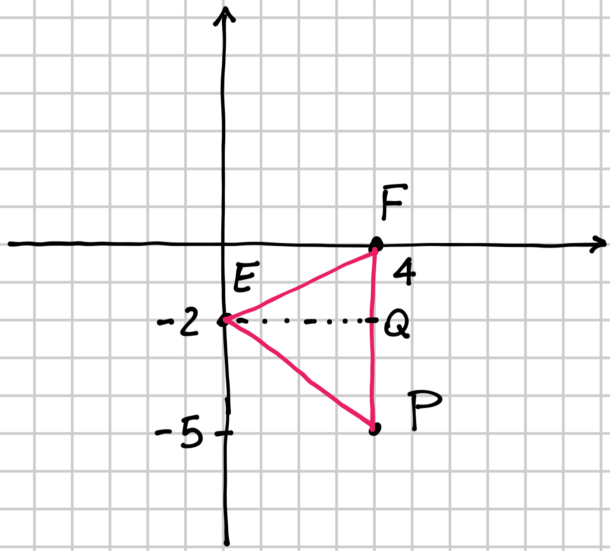
$$E\begin{cases} x^2+y^2-3x-4=0 \\ y=-\frac{3}{4}x-2 \end{cases} \qquad x^2+\frac{9}{16}x^2+\cancel{4}+\cancel{3x}-\cancel{3x}-\cancel{4}=0 \qquad x=0$$

$$E(0,-2)$$

$$F\begin{cases} x^2+y^2-3x-4=0 \\ x=4 \end{cases} \qquad 16+y^2-12-4=0 \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \qquad F(4,0)$$

$E(0,-2)$ $\quad P(4,-5)$

$F(4,0)$



$\overline{FP} = 5$

$\overline{EQ} = 4$

$\mathcal{A}_{EFP} = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 = 10$

$\overline{EF} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\overline{EP} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$2p = \overline{EF} + \overline{EP} + \overline{FP} = 2\sqrt{5} + 5 + 5 = 2\sqrt{5} + 10 =$

$= \boxed{2(\sqrt{5} + 5)}$