POTENZE E PROPRIETÀ

$a \in \mathbb{R} \quad a > 0$ BASE DELLA POTENZA

POTENZA A ESPONENTE NATURALE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

DEF. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ FATTORI}}$

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

DEFINIZIONE PIÙ FORMALE

in particolare

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

Queste proprietà devono essere mantenute nel passaggio alle potenze con esponente intero, razionale, reale

Perché è conveniente che si definisca $a^0 = 1$?

$a^3 : a^3 = 1$ perché divido un numero per se stesso

$a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$ per la proprietà formale

$\Rightarrow 1 = a^0$

1^a ESTENSIONE → POTENZE A ESPONENTE INTERO $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad$ ES. $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

Perché questa definizione?

$$a^{-5} \cdot a^5 = a^{-5+5} = a^0 = 1 \text{ , cioè } \quad a^{-5} \cdot a^5 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$$

Con questa nuova definizione continuano a valere le proprietà formali delle potenze.

2^a ESTENSIONE → POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ $\qquad 7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$ $\qquad 7^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{7^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$

Perché questa definizione?

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Ancora, con questa definizione valgono tutte le proprietà formali delle potenze.

POTENZE A ESPONENTE REALE

ES. $3^{\sqrt{2}}$ come può essere definito?

$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, che può essere approssimato da numeri razionali (sia per eccesso che per difetto)

$\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ 1,4 \\ 1,41 \\ 1,414 \\ 1,4142 \\ \vdots \end{array}\right]$$ numeri razionali che approssimano per difetto $\sqrt{2}$

Considero

$$\left.\begin{array}{l} 3^{1} \\ 3^{1,4} \\ 3^{1,41} \\ 3^{1,414} \\ 3^{1,4142} \\ \vdots \end{array}\right]$$ POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE (che ho già definito in precedenza)

Si dimostra che questo processo porta via via ad avvicinarsi a un numero reale ben preciso $\rightarrow$ questo numero lo chiamo $3^{\sqrt{2}}$

Anche con questa definizione di potenza a esponente reale valgono tutte le proprietà formali delle potenze.

Ad esempio:

$$3^{\pi} \cdot 3^{\sqrt{2}} = 3^{\pi + \sqrt{2}}$$

$$\left(5^{\pi}\right)^{2} = 5^{2\pi}$$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a > 0$ $\qquad x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ FUNZ. ESPONENZIALE DI BASE a

$\downarrow$ NUMERO FISSATO

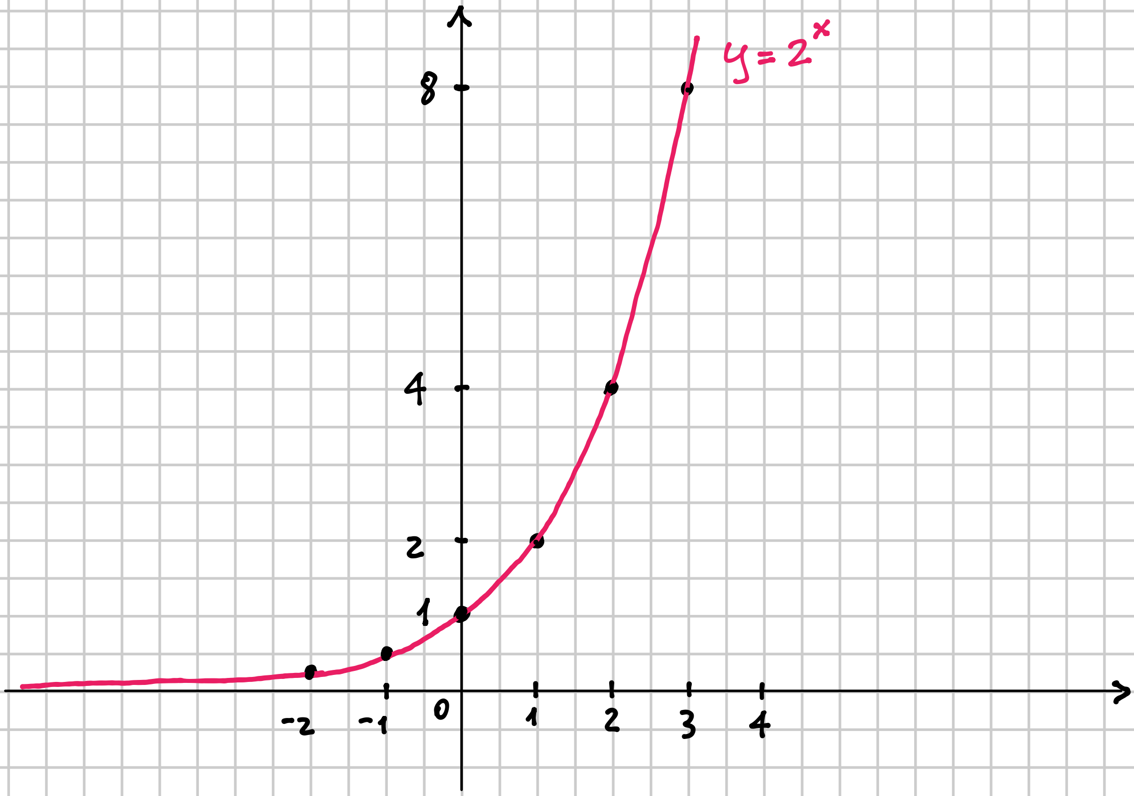
$$\left(f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = a^x \right)$$

Il grafico è la curva $y = a^x$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2^x$ (il cui grafico è la curva $y = 2^x$)

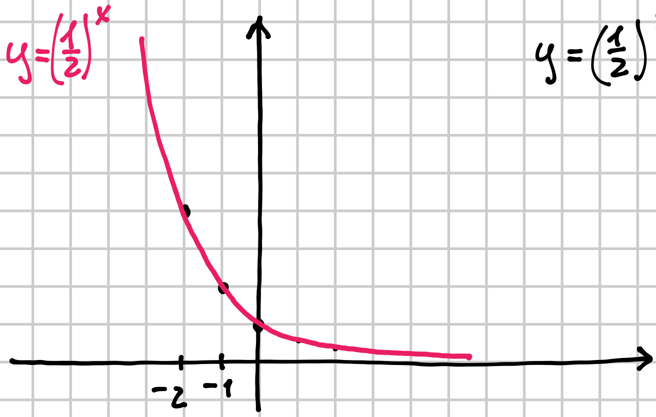
x	y
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
....	....
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$



Si dimostra che $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Se disegno $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (prendo $a = \frac{1}{2}$) ottengo il grafico:

x	y
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$\vdots$	
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

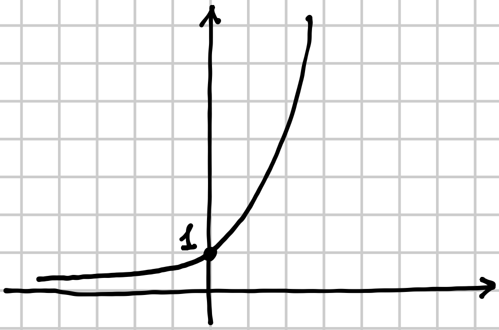


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ è la SIMMETRICA di $y = 2^x$ risp. asse y

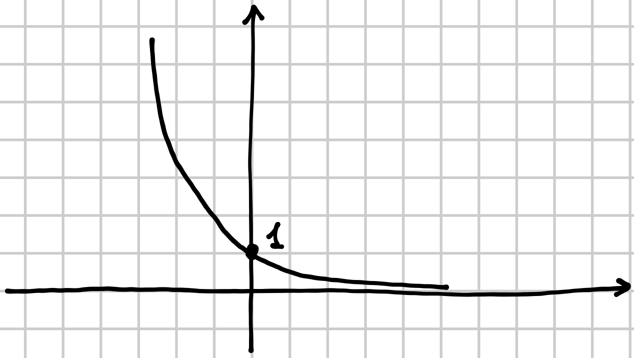
Infatti $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

Le curve esponenziali hanno tutte questo andamento

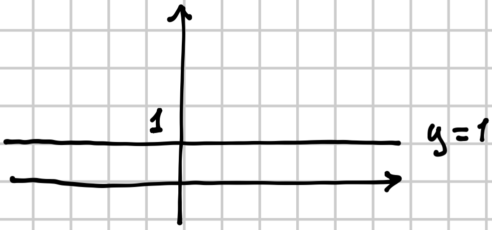
$y = a^x \qquad a > 1$



$y = a^x \qquad 0 < a < 1$



Se $a = 1 \Rightarrow \quad y = 1^x = 1$



Tenere presente che