FUNZIONE LOGARITMICA

$$x \xmapsto{\exp_a} a^x \xmapsto{\log_a} x$$

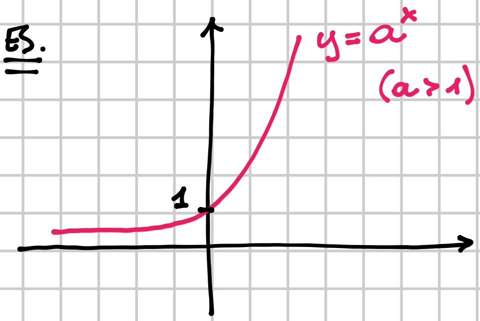
$\exp_a(x) = a^x$

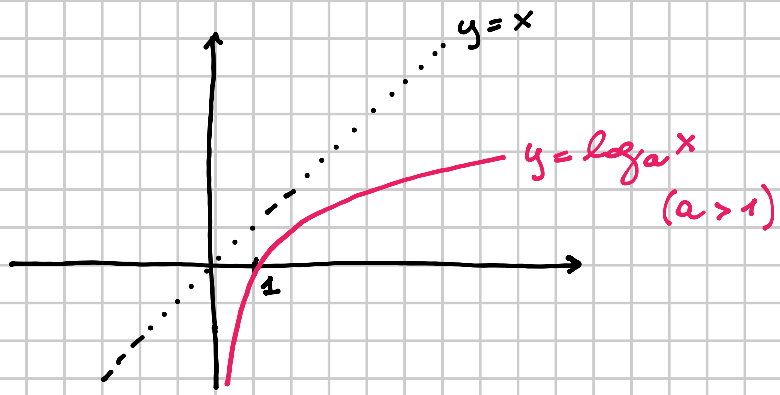
$\exp_2(x) = 2^x$

FUNZIONE ESPONENZIALE

la funzione logaritmica $\log_a$ è la funzione **INVERSA** della funzione esponenziale $\exp_a$

ES.





DEFINIZIONE

Dato un numero $a > 0$ e $a \neq 1$ e un numero $b > 0$, si chiama **LOGARITMO IN BASE a DI b** (e si indica con $\log_a b$) l'esponente da dare ad a per ottenere b, cioè

$$y = \log_a b \iff a^y = b$$

ESEMPIO

$\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$

OSSERVAZIONE

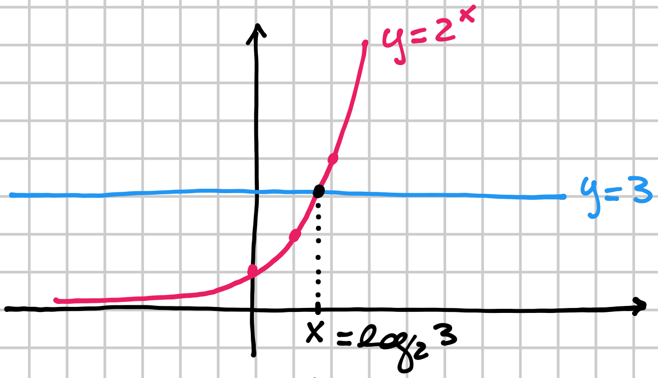
$\log_2 2^3 = 3$ e in generale $\log_2 2^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Viceversa, se $2^{\log_2 3} = 3$ e in generale $2^{\log_2 x} = x \quad \forall x > 0$

è l'esponente da dare a 2 per ottenere 3

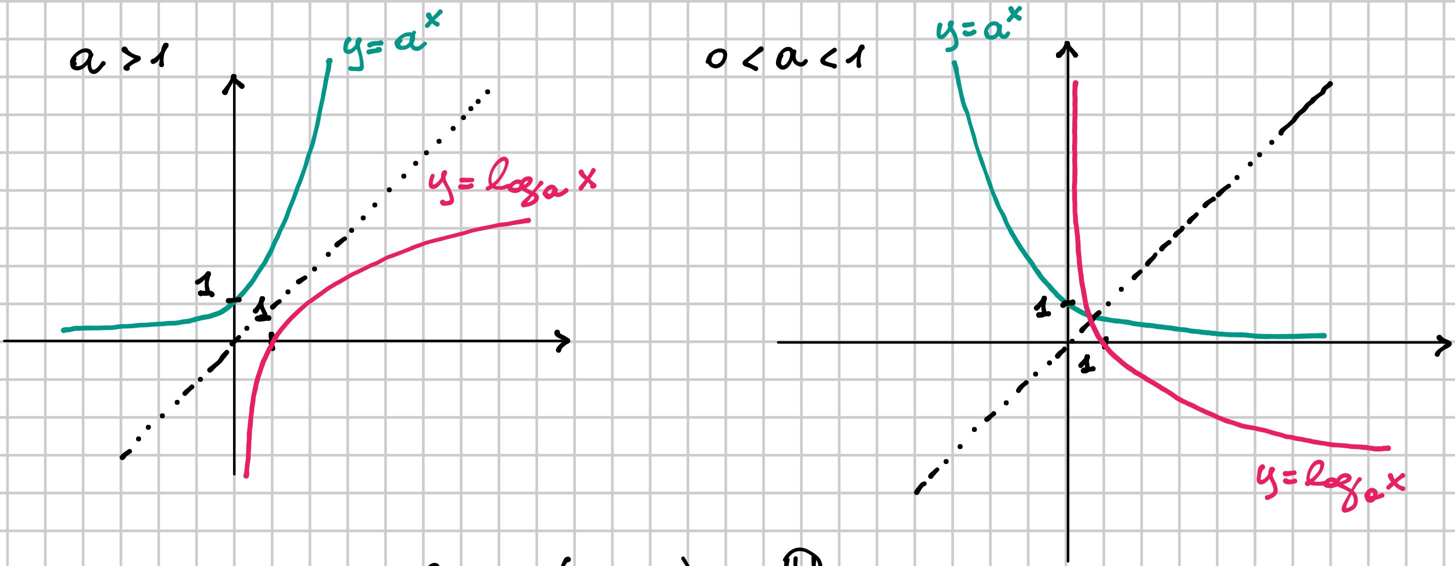
Esiste un numero x tale che $2^x = 3$?

RISPOSTA = SÍ perché $y=2^x$ e $y=3$ si intersecano



questa x la chiamo $\log_2 3$, cioè la soluzione dell'eq. $2^x = 3$

I GRAFICI DELLE FUNZIONI LOGARITMICHE SONO FATTI COSÌ:



$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Il DOMINIO di $\log_a$ è $(0,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

17 $\log_3 27 = 3$ $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

$\log_5 25 = 2$ $\log_5 (5^2) = 2$

$\log_2 64 = 6$ perché $2^6 = 64$, quindi $\log_2 64 =$

$= \log_2 (2^6) = 6$

$\log_2 1 = 0$

20 $\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3}$; $\log_2 \frac{1}{16}$.

$$\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3} = \log_3 \left(3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 3^{-2+\frac{1}{2}} = \log_3 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$$

26 $\log_5 \sqrt[5]{5}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\log_5 \sqrt[5]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}-1} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

34 $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8}$; $\log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[4]{27}$.

35 $\log_{32} \sqrt[5]{8}$; $\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27}$.

$\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8} = \log_{\frac{4}{9}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 = x$ Ricordare che $\log_a b = x \iff a^x = b$

$\Updownarrow$

$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ $2x = -3$ $x = -\frac{3}{2}$

$\log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[4]{27} = x \iff \left(\sqrt[3]{9}\right)^x = \sqrt[4]{27}$

$3^{\frac{2}{3}x} = 3^{\frac{3}{4}}$ $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}$ $x = \frac{9}{8}$

$\log_{32} \sqrt[5]{8} = x \iff 32^x = \sqrt[5]{8}$ $2^{5x} = 2^{\frac{3}{5}}$

$5x = \frac{3}{5}$ $x = \frac{3}{25}$

$\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27} = x \iff \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{64}{27}$ $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ $x = 3$

36 $\log_a a$; $\log_{2a}(4a^2)$.

37 $\log_{\sqrt{a}} a^3$; $\log_a(a\sqrt{a})$.

$\log_a a = 1$

$\log_{2a}(4a^2) = \log_{2a}(2a)^2 = 2$

$\log_{\sqrt{a}} a^3 = x \qquad (\sqrt{a})^x = a^3 \qquad a^{\frac{x}{2}} = a^3 \qquad \frac{x}{2} = 3 \qquad x = 6$

$\log_a(a\sqrt{a}) = \log_a\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right) = \log_a a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

44 $\log_4 b = -2$; Trovare $b > 0$

$4^{-2} = b \implies b = \frac{1}{16}$

$\log(1 - b) = -1$ Trovare $b \qquad 1 - b > 0 \qquad b < 1$

BASE 10

$10^{-1} = 1 - b \qquad b = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

a base dei logaritmi $a > 0$, $a \neq 1$ x, y argomenti $x, y > 0$

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

DIMOSTRAZIONE

$$a^{\log_a(x\cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}$$

$$x \cdot y = x \cdot y$$

tutte uguaglianze equivalenti

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

DIMOSTRAZIONE

Simile alla precedente

3) $\log_a x^y = y \log_a x$ $(x > 0,\ y \in \mathbb{R})$

DIMOSTRAZIONE

$$a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$$

$$x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y$$

$$x^y = x^y$$

4) FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE

$$\log_a x = \frac{\log_n x}{\log_n a}$$

n = "nuova" base ($n > 0$ $n \neq 1$)

DIMOSTRAZIONE

$$(\log_a x) \cdot (\log_n a) = \log_n x$$

APPLICO LA PROPR. 3)

$$\log_n a^{\log_a x} = \log_n x$$

$$\log_n x = \log_n x$$

Usare le proprietà dei logaritmi per scrivere l'espressione con 1 solo logaritmo

110 $\frac{1}{2}[\log_2 a + 2\log_2(a+4)] - \log_2(a-1) =$ $\left[\log_2 \frac{\sqrt{a}\cdot(a+4)}{a-1}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\log_2 a + \log_2 (a+4)^2\right] - \log_2(a-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log_2 \left(a \cdot (a+4)^2\right)\right] - \log_2(a-1) =$$

$$= \log_2 \left[a \cdot (a+4)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \log_2(a-1) =$$

$$= \log_2 \frac{\left[a \cdot (a+4)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{a-1} = \log_2 \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot (a+4)}{a-1} =$$

$$= \log_2 \frac{\sqrt{a}\,(a+4)}{a-1}$$

SEMPLIFICARE LA SEGUENTE ESPRESSIONE

149 $\log_3 8 - \dfrac{1}{2\log_8 3} + \log_3 4 \log_4 7\sqrt{2} =$ $[\log_3 28]$

$$= \log_3 8 - \frac{1}{2\,\dfrac{\log_3 3}{\log_3 8}} + \cancel{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 7\sqrt{2}}{\cancel{\log_3 4}} =$$

(1)

$$= \log_3 8 - \frac{\log_3 8}{2} + \log_3 7\sqrt{2} =$$

SI POTEVA ANCHE FARE

$$\frac{1}{2}\log_3 8 = \log_3 \sqrt{8}$$

$$= \log_3 8 - \frac{1}{2}\log_3 8 + \log_3 7\sqrt{2} =$$

$$= \log_3 8 - \log_3 \sqrt{8} + \log_3 7\sqrt{2} =$$

$$= \log_3 \frac{8}{\sqrt{8}} + \log_3 7\sqrt{2} =$$

$$= \log_3\left(\frac{8}{\sqrt{8}} \cdot 7\sqrt{2}\right) = \log_3\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}} \cdot 7\cancel{\sqrt{2}}\right) = \log_3 28$$