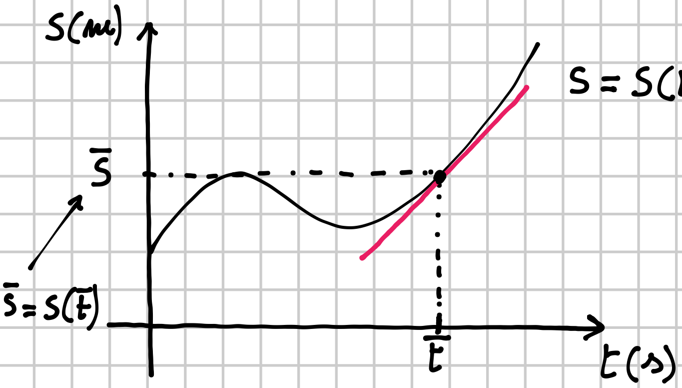
LE DERIVATE IN FISICA

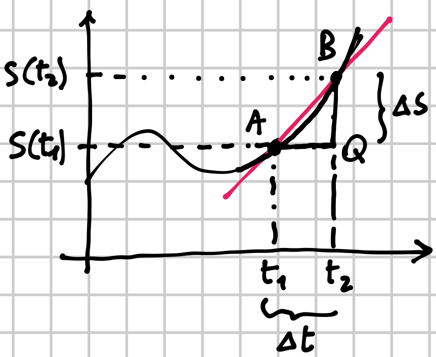
Considero un punto materiale che si muove di moto vario su una traiettoria rettilinea. Posso considerare il suo grafico spazio-tempo



$S = S(t)$ LEGGE ORARIA DEL MOTO

La velocità (istantanea) all'istante $\bar{t}$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel punto $(\bar{t}, \bar{s})$

Perché la velocità istantanea è il coeff. angolare della tangente?



VEL. MEDIA

$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

↓

coeff. angolare della secante

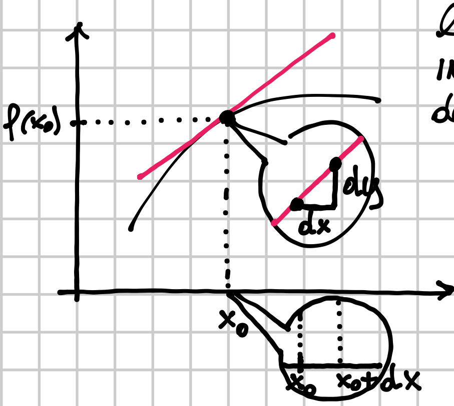
Per trovare la velocità istantanea dobbiamo considerare Δt INFINITESIMO

↓ in termini più moderni significa fare il limite di $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ per $\Delta t \to 0$

$$v(\bar{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

PROBLEMA: Data una funzione $y = f(x)$ e un punto del suo grafico $P(x_0, f(x_0))$, trovare il coefficiente angolare della tangente

RAGIONAMENTO INFINITESIMALE

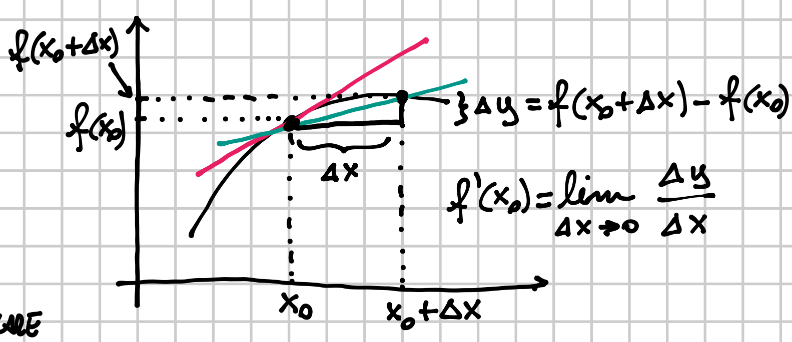


la tangente è INDISTINGUIBILE dalla curva

$$f'(x_0) \simeq \frac{dy}{dx}$$

DERIVATA DI f IN x_0 È IL COEFF. ANGOLARE DELLA TANGENTE

RAGIONAMENTO "ALLA WEIERSTRASS"



$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ESEMPIO

$f(x) = x^2$

Considero la funzione $y = x^2$ e un suo generico punto x.
Voglio calcolare la derivata in x, cioè $f'(x)$

ALLA WEIERSTRASS

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

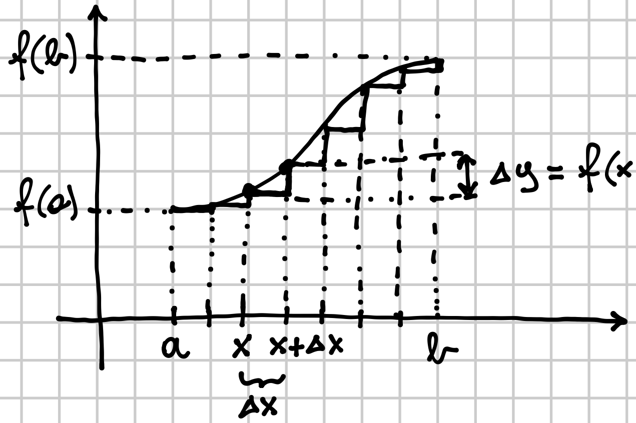
RAGIONAMENTO INFINITESIMALE

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\,dx + dx^2 - \cancel{x^2}}{dx} =$$

$$= \frac{\cancel{dx}(2x + dx)}{\cancel{dx}} = 2x + dx \simeq 2x = f'(x)$$

è il coeff. angolare della tangente in $(x, f(x))$

Consideriamo una funzione derivabile $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

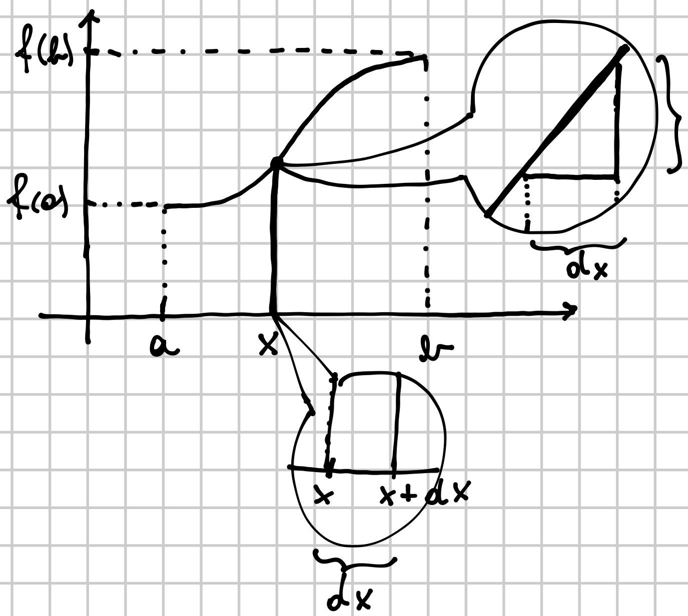


$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

INCREMENTO NON INFINITESIMO

$$f(b) = f(a) + \sum \Delta y$$

$$\sum \Delta y = f(b) - f(a)$$



$dy \simeq f'(x)\,dx$

PRATICAMENTE É UGUALE!

=

$$\int_{f(a)}^{f(b)} dy = f(b) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} dy = \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

TEOREMA FONDAMENTALE

DEL CALCOLO (INTEGRALE)