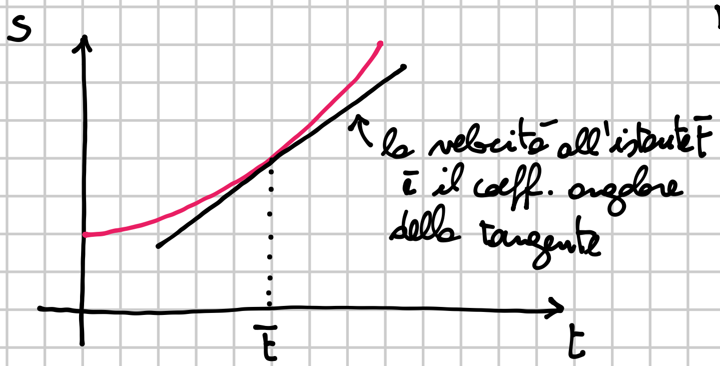
DERIVATE E INTEGRALI IN FISICA

Consideriamo un punto materiale che si muove su una retta, con legge oraria

$$s = s(t)$$ POSIZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO (fissato un S.R.)



VELOCITÀ ISTANTANEA

$$v = v(t) = \frac{ds}{dt}$$ derivata della posizione rispetto al tempo

ACCELERAZIONE (ISTANTANEA)

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt}$$ derivata della velocità rispetto al tempo

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}$$ è la derivata SECONDA della posizione rispetto al tempo

ESEMPIO: MOTO RETT. UNIF. ACCELERATO

$$s = s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

$$v = v(t) = \frac{ds}{dt} = at + v_0$$

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt} = a$$

TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

AREA CERCHIO

πr^2

DERIVATA

LUNGHEZZA CIRCONFERENZA

$2\pi r$

VOLUME SFERA

$\frac{4}{3}\pi r^3$

DERIVATA (RISP. A r)

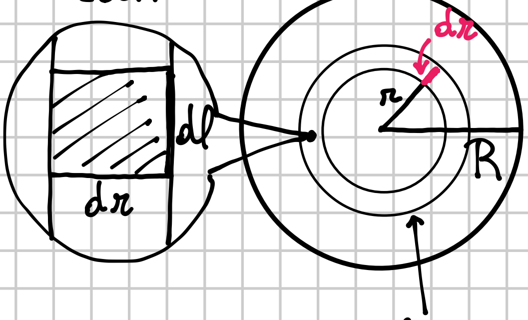
AREA SUPERFICIE SFERICA

$4\pi r^2$

Ricaviamo la formula dell'area del cerchio a partire dalla formula della lunghezza della circonferenza

RAGGIO R

ZOOM



$0 \leq r \leq R$

dr = "spessore" infinitesimo della corona circolare

dl = pezzettino infinitesimo di circonferenza

il cerchio viene visto come unione di corone circolari sempre più grandi

$$dA = dr \cdot dl \Rightarrow \text{area di TUTTA la corona circolare (infinitesima)} = \int dr \cdot dl = dr \cdot \overbrace{\int dl}^{2\pi r} = 2\pi r \, dr$$

area del pezzettino di corona circolare

$$\text{AREA CERCHIO} = \text{SOMMA DI TUTTE LE AREE DELLE CORONE CIRCOLARI CON } 0 \leq r \leq R = \int_0^R 2\pi r \, dr = \int_0^R (\pi r^2)' \, dr = \pi R^2 - \pi \cdot 0^2 = \pi R^2$$

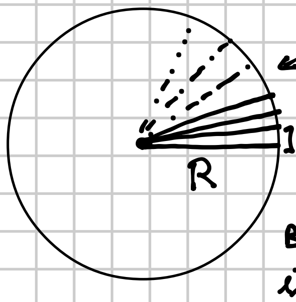
applico il TH. FOND. DEL CALCOLO

TH. FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Si poteva vedere anche così:

cerchio composto da infiniti settori circolari infinitesimi

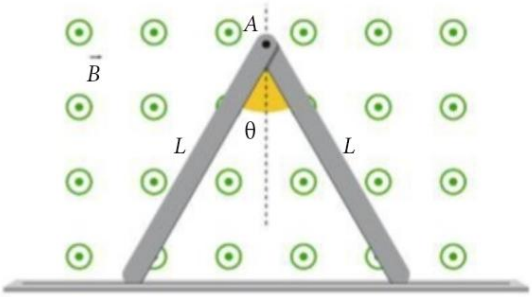


AREA DI UN SETTORE $= \frac{1}{2} R \, dl$

BASE dl infinitesimo

$$\text{AREA CERCHIO} = \int \frac{1}{2} R \, dl = \frac{1}{2} R \underbrace{\int dl}_{\text{lunghezza della circonferenza}} = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2$$

76 CON LE DERIVATE E GLI INTEGRALI Due sottili sbarrette conduttrici, di lunghezza $L = 10$ cm e resistenza complessiva R, sono incernierate nel punto A mentre gli altri due estremi liberi delle sbarrette possono scorrere senza attrito lungo una sottile asta di resistenza trascurabile. Il circuito ha la forma di un triangolo isoscele con angolo nel vertice A che può variare nel tempo seguendo la formula $\theta = \alpha t$ con $\alpha = (\pi/6)\text{s}^{-1}$.
Al tempo $t = 1{,}0$ s viene acceso un campo magnetico $B = 0{,}64$ T uniforme e costante, diretto perpendicolarmente al piano del triangolo. Al tempo $t = 2{,}0$ s la corrente che circola nel triangolo ha intensità $i = 1{,}6$ mA.



▸ Calcola la resistenza totale R delle due sbarrette.

[0,52 Ω]

$$i = \left| -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \right|$$

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} =$$

$$= BS = B \cdot \frac{1}{2} L^2 \sin\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2} B L^2 \sin \alpha t$$

$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{1}{2} B L^2 (\cos\alpha t) \cdot \alpha$$

αt varia da $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{3}$
e in questo intervallo $\cos\alpha t > 0$

$$i = \left| -\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2} B L^2 \alpha \cos\alpha t \right|$$

$$\Downarrow$$

$$i = \frac{1}{2R} B L^2 \alpha \cos\alpha t$$

$$R = \frac{B L^2 \alpha \cos\alpha t}{2i}$$

$t = 2{,}0\ s \Rightarrow i = 1{,}6 \times 10^{-3}$ A

$$R = \frac{(0{,}64\ \text{T})(10 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 \left(\frac{\pi}{6}\ s^{-1}\right) \cos\frac{\pi}{3}}{2\,(1{,}6 \times 10^{-3}\ \text{A})} =$$

$$= 5{,}2359\ldots \times 10^{-1}\ \Omega \simeq \boxed{0{,}52\ \Omega}$$