Onde elettromagnetiche (sintesi)

MAXWELL (Trattato di elettricità e magnetismo, 1873)

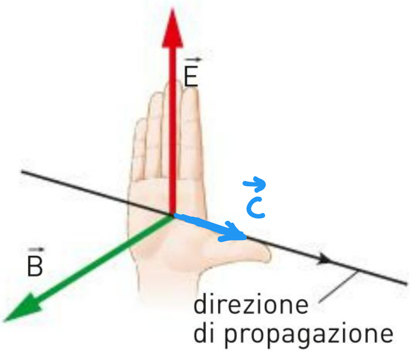
$\Downarrow$

I campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo soddisfano un'*equazione d'onda lineare*. In pratica le equazioni di Maxwell prevedono l'esistenza di *onde elettromagnetiche* consistenti di campi elettrici e magnetici oscillanti.

Proprietà

1) $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono sempre perpendicolari tra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c} \quad \Rightarrow \quad E = cB$$



velocità dell'onda

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

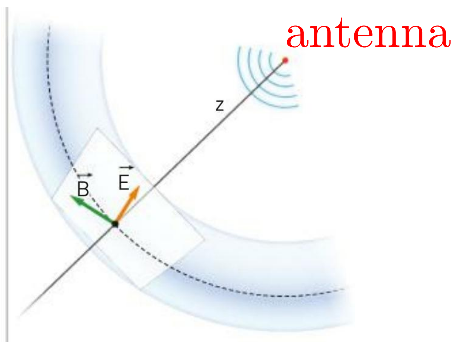
VELOCITÀ DELLA LUCE

Le onde elettromagnetiche sono *trasversali* e *si propagano anche nel vuoto*

2) Se una carica oscilla (ad es. in un'antenna) emette un'onda elettromagnetica. Consideriamo la sorgente puntiforme e i fronti d'onda piani (poiché consideriamo punti sufficientemente lontani dalla sorgente)

$\Downarrow$

ONDE TRASVERSALI PIANE



3) Se la sorgente si muove di moto armonico con frequenza f, anche l'onda elettromagnetica emessa è *armonica*, cioè

$$E = E_0 \cos[k(x - ct)]$$
$$B = B_0 \cos[k(x - ct)]$$

E_0, B_0 ampiezze

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ NUMERO D'ONDA

$\downarrow$

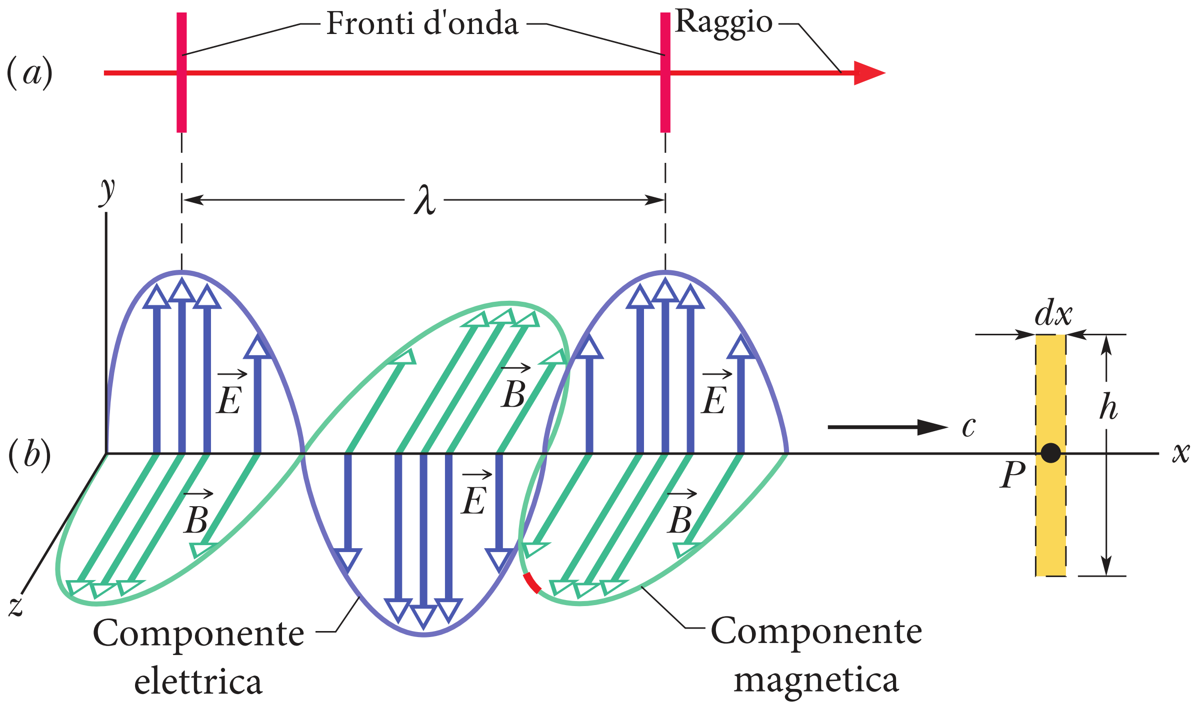
$\dfrac{1}{\lambda} =$ numero di oscillazioni nell'unità di lunghezza

$\lambda =$ LUNGHEZZA D'ONDA

$f = \dfrac{c}{\lambda}$ FREQUENZA

$\Downarrow$

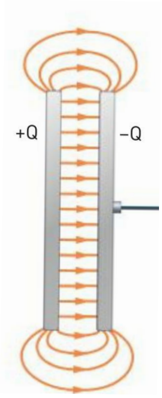
$c = \lambda f$ velocità di propagazione



Il campo elettrico e il campo magnetico oscillano *in fase*

Energia trasportata da un'onda elettromagnetica

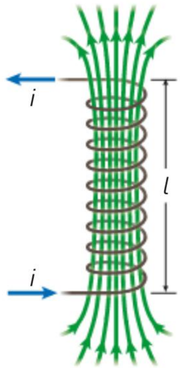
Densità volumica di energia del campo elettrico



$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Densità volumica di energia del campo magnetico

$$w_{\vec{B}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$



valgono in generale

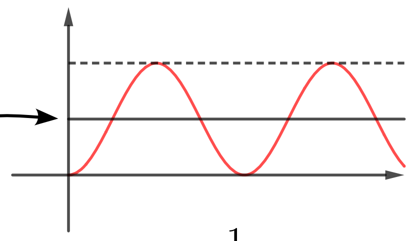
Nello spazio attraversato da un'onda elettromagnetica c'è una densità di energia

$$w = w_{\vec{E}} + w_{\vec{B}} \quad \text{che varia nel tempo}$$

Se l'onda è *armonica*, calcoliamone il valore medio $\bar{w}$

$$\bar{w}_{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \qquad \bar{w}_{\vec{B}} = \frac{1}{4\mu_0} B_0^2$$

per funzioni $a\sin^2 x$



valore medio $= \frac{1}{2}$valore max

$$\bar{w} = \bar{w}_{\vec{E}} + \bar{w}_{\vec{B}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{4\mu_0} B_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(E_0^2 + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} B_0^2 \right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(E_0^2 + c^2 B_0^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 \left(E_0^2 + E_0^2 \right) = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

densità volumica media di energia di un'onda elettromagnetica

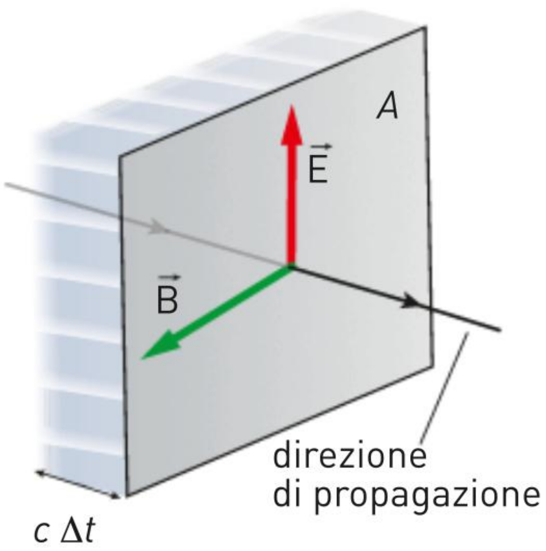
Valori efficaci (vedi dopo)

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad B_{\text{eff}} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

intensità che dovrebbe avere un campo costante per avere una densità di energia pari a quella media

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \bar{w}_{\vec{E}}$$

Irradiamento (o intensità dell'onda)



$$E_R = \frac{\overbrace{\mathcal{E}}^{\text{energia trasportata}}}{\underbrace{A}_{\text{superficie investita (perpendicolare alla direzione di propagazione)}} \cdot \underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo}}}$$

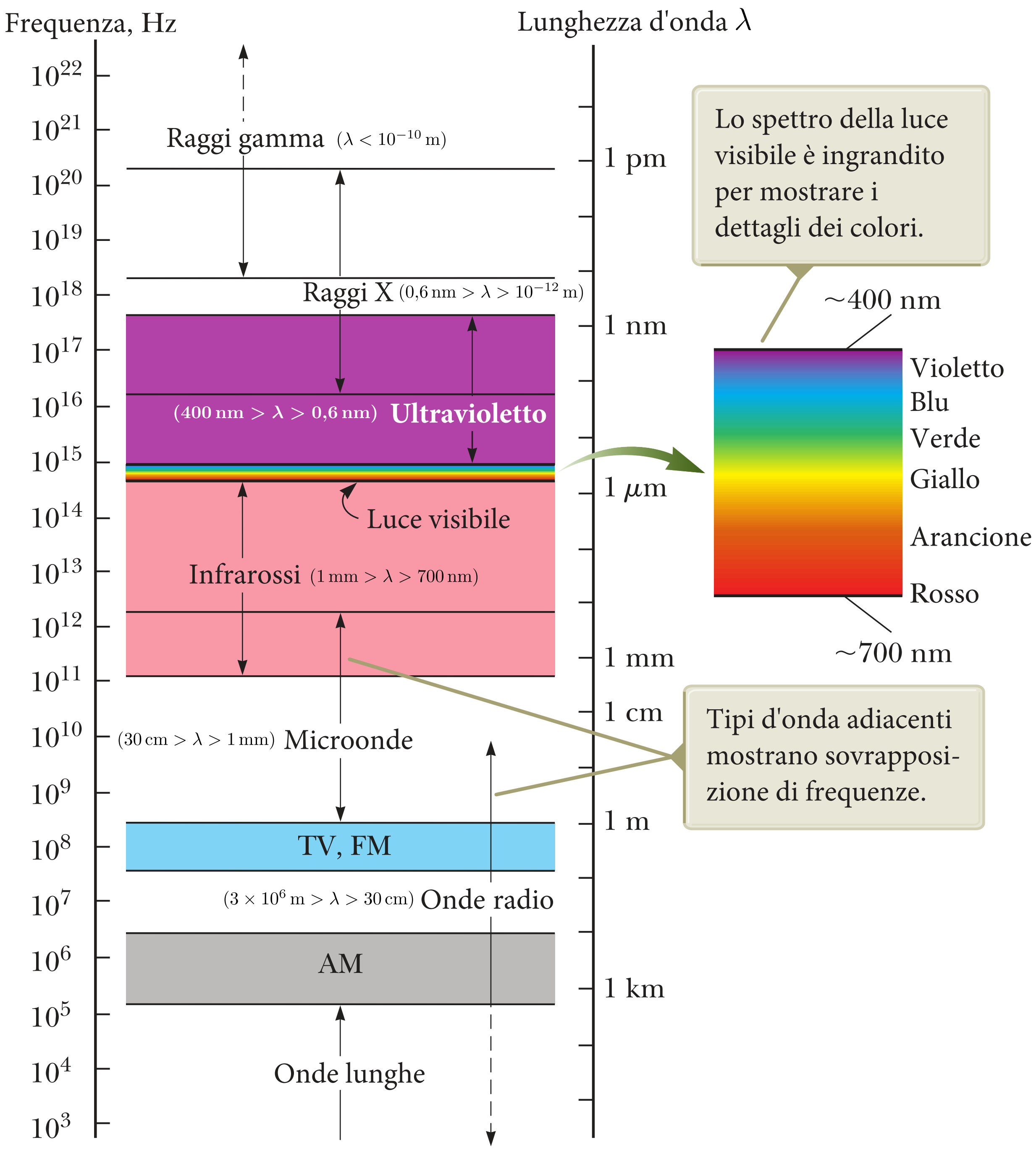
$$\text{unità di misura} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\mathcal{E} = \bar{w}\, A\, c\, \Delta t \qquad\qquad E_R = \frac{\bar{w}\, \cancel{A}\, c\, \cancel{\Delta t}}{\cancel{A}\, \cancel{\Delta t}} = c\, \bar{w}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_R = \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0 E_0^2}$$

Lo spettro elettromagnetico



Lo spettro è suddiviso convenzionalmente in una successione di bande: ONDE RADIO, MICROONDE, INFRAROSSO, VISIBILE, ULTRAVIOLETTO, RAGGI X, RAGGI γ

Le separazioni non sono nette e gli intervalli delle singole bande hanno zone di sovrapposizione

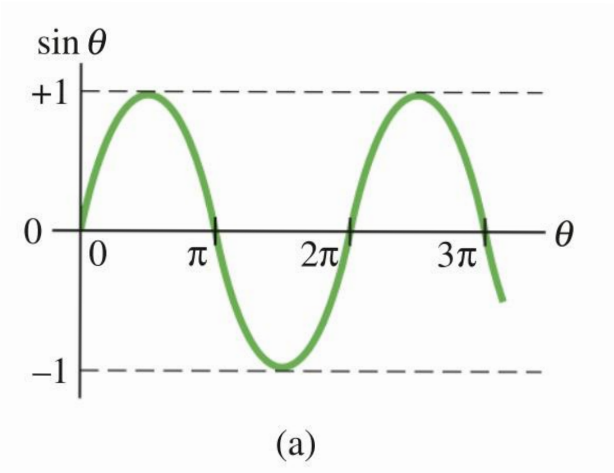
Spettro elettromagnetico (Caterina Vozzi)
https://www.youtube.com/watch?v=QCUaNjpJtSg

Puntualizzazioni su valore medio e valore efficace

Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$, si dice *valore medio di* f *su* $[a,b]$ il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

che corrisponde al valore di una funzione costante che ha lo stesso integrale di f su $[a,b]$



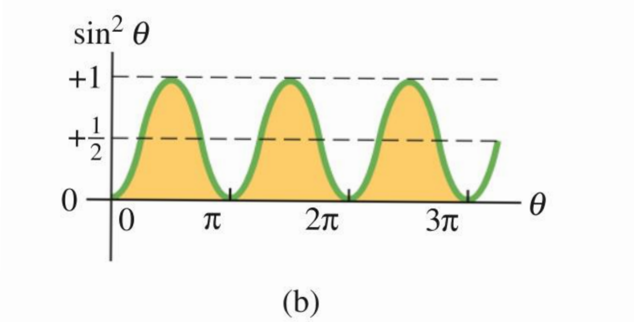


Figura 35.17 (a) Un grafico di sin θ in funzione di θ. Il suo valore medio su un periodo è zero. (b) Un grafico di $\sin^2\theta$ in funzione di θ. Il suo valor medio su un periodo è $\frac{1}{2}$.

(Si noti in figura 35.17b come le parti ombreggiate della curva che giacciono sopra la linea orizzontale corrispondente a $\frac{1}{2}$ siano esattamente equivalenti agli spazi bianchi al di sotto della stessa linea.)

Se consideriamo la densità volumica di energia del campo elettrico

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$E = E(t)$, cioè E varia nel tempo, secondo una funzione sinusoidale

$$E = E_0 \sin[k(x - ct)]$$

dunque $w_{\vec{E}}$ è del tipo costante $\cdot \sin^2$, per cui il suo valor medio è costante $\cdot\, \frac{1}{2}$, cioè proprio

$$\boxed{\bar{w}_{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2}$$

Dunque

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{e} \qquad \bar{w}_{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$$

Qual è il valore *costante* di E per cui $w_{\vec{E}} = \bar{w}_{\vec{E}}$?

Tale numero si chiama *valore efficace* di E e corrisponde a

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

infatti

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \bar{w}_{\vec{E}}$$

E_{eff} è perciò il valore costante di un campo con la densità volumica di energia uguale a quella media

Quantità di moto e impulso

Quantità di moto di un corpo di massa m e velocità $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Impulso di una forza $\vec{F}$ che agisce in un intervallo di tempo dt

$$\boxed{\vec{F}\,dt}$$

Impulso di una forza $\vec{F}$ che agisce in un intervallo di tempo Δt (con inizio all'istante t)

$$\boxed{\vec{I} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}\,dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}\,dt = d\vec{p}}$$

durante il tempo dt l'impulso della forza è uguale alla variazione della quantità di moto

integrando

$$\vec{I} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

Teorema dell'impulso
In un dato intervallo di tempo Δt l'impulso complessivo esercitato su un punto materiale dalle forze ad esso applicate è pari alla variazione della sua quantità di moto

In generale $\vec{F}$ è variabile. Se consideriamo la *forza media* $\vec{F}_m$

$$\boxed{\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{p}}$$

Quantità di moto trasferita dall'onda

Le onde elettromagnetiche non trasportano solo energia, ma anche quantità di moto

Si può dimostrare che, se un corpo assorbe dall'onda un'energia $\mathcal{E}$, esso riceve, nella direzione di propagazione, una quantità di moto $\Delta\vec{p}$ che ha modulo

modulo della quantità di moto acquistata (kg · m/s)

energia assorbita (J)

$$\Delta p = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

velocità della luce nel vuoto (m/s)

Se, anziché assorbire l'onda elettromagnetica, il corpo la riflette, la variazione $\Delta\vec{p}$ della sua quantità di moto è doppia.

Se un'onda elettromagnetica colpisce perpendicolarmente una superficie A, trasferendo una quantità di moto Δp in un intervallo di tempo Δt, esercita una forza media F tale che

$$\text{TEOREMA DELL'IMPULSO} \quad \Rightarrow \quad F\,\Delta t = \Delta p = \frac{\mathcal{E}}{c} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mathcal{E}}{c\,\Delta t}$$

Introduciamo la seguente grandezza, detta **pressione di radiazione**

irradiamento E_R

$$p_R = \frac{F}{A} = \frac{\mathcal{E}}{c\,A\,\Delta t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p_R = \frac{E_R}{c}}$$

ricordando che $E_R = c\bar{w}$, si ha che la pressione di radiazione è uguale alla densità media di energia dell'onda elettromagnetica

$$p_R = \bar{w}$$