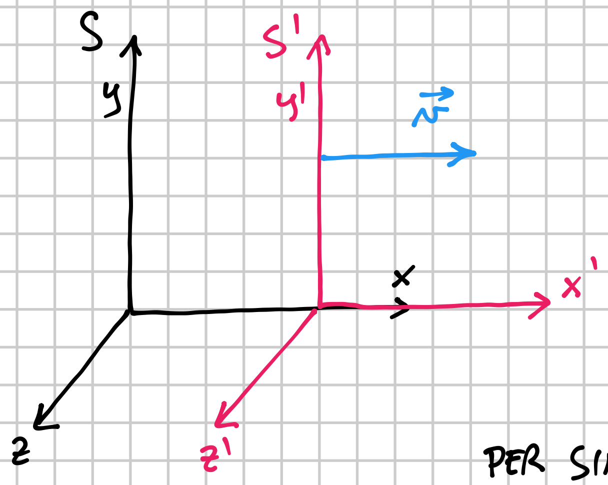
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INVERSE



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

PER SIMMETRIA (sostituisco v con $-v$)

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{\overset{\text{MODULO}}{v}}{c}$$

__COMPITO__: invertire algebricamente $\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$

__SOLUZIONE__

$$x' = \gamma x - v\gamma t \qquad \gamma x = x' + v\gamma t \qquad x = \frac{x'}{\gamma} + vt$$

SOSTITUISCO IN t' ⟶

$$t' = \gamma\left[t - \frac{\beta}{c}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right] = \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \frac{\beta v \gamma}{c}t =$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \beta^2\gamma t$$

$$\Rightarrow \gamma t - \beta^2\gamma t = t' + \frac{\beta}{c}x' \qquad \gamma t(1-\beta^2) = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

OSSERVO CHE

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\cancel{\gamma} t \cdot \frac{1}{\gamma^{\cancel{2}}} = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

$$\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)}$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma t' + \underbrace{\frac{v\beta}{c}}_{\beta^2}\gamma x' =$$

$$= \gamma x'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) + v\gamma t' = \gamma x'(1 \cancel{-\beta^2} \cancel{+\beta^2}) + v\gamma t' = \boxed{\gamma(x' + vt')}$$

66 ◆◆◆ Nel sistema di riferimento S un punto materiale è nella posizione $x = 40$ m all'istante $t = 0{,}10$ μs. Un secondo sistema di riferimento S' si muove lungo l'asse x nel verso positivo con velocità $v = 2{,}0 \times 10^8$ m/s. (con le solite convenzioni)

▸ Determina le coordinate dello stesso punto materiale in S'.

[27 m; $1{,}5 \times 10^{-8}$ s]

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases}$$

S	S'
$x = 40\ \text{m}$	$x' = ?$
$t = 0{,}10 \times 10^{-6}\ \text{s}$	$t' = ?$

$v = 2{,}0 \times 10^8\ \text{m/s}$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{2}{3}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$x' = \gamma(x - v t) = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(40 - (2{,}0 \times 10^8)\cdot(0{,}10 \times 10^{-6})\right)\ \text{m} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{5}}(40 - 20)\ \text{m} = \frac{60}{\sqrt{5}}\ \text{m} = 26{,}83\ldots\ \text{m} \simeq \boxed{27\ \text{m}}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(0{,}10 \times 10^{-6} - \frac{\frac{2}{3}}{3{,}0 \times 10^8} \cdot 40\right)\ \text{s} =$$

$$= 0{,}0149\ldots \times 10^{-6}\ \text{s} \simeq \boxed{1{,}5 \times 10^{-8}\ \text{s}}$$

67 ◆◆◆ Una particella si muove nel verso positivo della direzione x con velocità costante nel sistema del laboratorio S. Un contatore per i raggi cosmici rileva il passaggio di una particella nella posizione $x_1 = 80$ cm all'istante $t_1 = 15$ ns. Il sistema di riferimento S' si muove nel verso negativo dell'asse x con velocità $-3c/5$. I due sistemi di riferimento sono in configurazione standard.

▶ Calcola le coordinate della particella misurate in S'.

[4,4 m; $2{,}1 \times 10^{-8}$ s]

$v = \frac{3}{5}c$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + vt) \\ t' = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

$\beta = \frac{3}{5}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

S	S'
$x = 80$ cm	$x' = ?$
$t = 15 \times 10^{-9}$ s	$t' = ?$

$$x' = \frac{5}{4}\left(80\times10^{-2} + \frac{3}{5}(3{,}0\times10^{8})(15\times10^{-9})\right) \text{m} = 4{,}375 \text{ m} \simeq \boxed{4{,}4 \text{ m}}$$

$$t' = \frac{5}{4}\left(15\times10^{-9} + \frac{3}{5(3{,}0\times10^{8})}(80\times10^{-2})\right) \text{s} = 20{,}75 \times 10^{-9} \text{ s}$$

$$\simeq \boxed{2{,}1\times10^{-8} \text{ s}}$$

68 ◆◆◆ Nel sistema di riferimento inerziale S viene osservato il moto di due elettroni. Il primo viene rilevato in $x_1 = 3{,}0$ m al tempo $t_1 = 1{,}0$ ns, il secondo viene rilevato in $x_2 = 8{,}20$ m al tempo $t_2 = 2{,}0$ ns. Un secondo sistema di riferimento S', in configurazione standard con S, ha velocità $v = -c/4$ rispetto a S.

▶ Calcola posizione e istante di rilevazione dei due elettroni nel sistema di riferimento S'.

[3,2 m; 3,6 ns; 8,6 m; 9,1 ns]

MODULO

$$v = \frac{c}{4} \qquad \beta = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16}}} = \frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\left(x + \frac{c}{4}t\right) \\ t' = \gamma\left(t + \frac{1}{4c}x\right) \end{cases}$$

$$x_1' = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(3{,}0 + \frac{3{,}0\times 10^8}{4}\left(1{,}0\times 10^{-9}\right)\right) m = 3{,}175\ldots m \simeq \boxed{3{,}2\ m}$$

$$t_1' = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(1{,}0\times 10^{-9} + \frac{1}{4(3{,}0\times 10^8)}\cdot(3{,}0)\right) s = 0{,}361\ldots \times 10^{-8}\ s \simeq \boxed{3{,}6\ ns}$$

$$x_2' = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(8{,}20 + \frac{3{,}0\times 10^8}{4}\left(2{,}0\times 10^{-9}\right)\right) m = 8{,}62\ldots m \simeq \boxed{8{,}6\ m}$$

$$t_2' = \frac{4}{\sqrt{15}}\left(2{,}0\times 10^{-9} + \frac{1}{4(3{,}0\times 10^8)}\cdot(8{,}20)\right) s = 0{,}912\ldots \times 10^{-8}\ s \simeq \boxed{9{,}1\ ns}$$