ESERCIZI VARI SULLE FUNZIONI

92 La successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right) \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

è un esempio di un antico metodo di calcolo della radice quadrata di 2 introdotto dai matematici babilonesi.

a. Scrivi i primi quattro termini della successione.

b. Dimostra che $x_n \geq 1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

a) $x_0 = 1$ $\quad x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{9+8}{6} = \frac{1}{2}\,\frac{17}{6} = \frac{17}{12} =$$

$$= 1{,}41\overline{6}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{289+288}{204} = \frac{1}{2}\,\frac{577}{204} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686\ldots$$

In pratica $\lim_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x_n^2 + 2}{x_n}$

Vediamo che $\frac{1}{2}\,\frac{x_n^2+2}{x_n} \geq 1$

$$\Updownarrow$$

$$x_n^2 + 2 \geq 2x_n \qquad (\text{per } x_n > 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$x_n^2 - 2x_n + 1 + 1 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_n^2 - 1)^2 + 1 \geq 0 \text{ che è vero!}$$

Prendiamo per buono che $x_n > 0$ $\forall n$, ma andrebbe dimostrato PER INDUZIONE

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Sia P_n una proprietà dei numeri naturali:

1) P_0 è VERA

2) $P_n \Longrightarrow P_{n+1} \quad \forall n$

Allora la proprietà vale per tutti i numeri naturali

ESEMPI

1) Dimostriamo per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq 1$.

In questo caso $P_n =$ "$2^n \geq 1$"

P_0 è vera perché $2^0 \geq 1$

Ora, se assumiamo che valga $2^n \geq 1$ (cioè P_n), dimostriamo che vale anche $2^{n+1} \geq 1$ (cioè P_{n+1}).

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq 1 \cdot 2 = 2 \geq 1 \text{, dunque } 2^{n+1} \geq 1$$

uso qui che $2^n \geq 1$

Allora $2^n \geq 1$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2) Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

P_1 è vera perché $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$

Assumiamo $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (cioè P_n) e

dimostriamo $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ (cioè P_{n+1})

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{OK!}$$

uso P_n

quindi $\forall n \; P_n$