535 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^{2x}}{(1+x^2)^x} = \frac{1^\infty}{1^\infty}$ F.I. $\left[\frac{1}{e^2}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[(1-x)^2\right]^x}{(1+x^2)^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right)} = (*)$$

A PARTE

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{2x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\,\underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{2x}{1+x^2}\right)}{-\frac{2x}{1+x^2}}}_{\to 1}\cdot\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) =$$

$$\boxed{\text{APPLICO } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad -\frac{2x}{1+x^2}\to 0 \text{ per } x\to+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln\left(1-\frac{2x}{1+x^2}\right)}{-\frac{2x}{1+x^2}}}_{\to 1}\cdot\frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1\right)} = -2$$

$$(*) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

517 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{2x} = 1^{\infty}$ F.I. $\left[\frac{1}{e^2}\right]$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{2x \ln\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)} = \dots (*) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

A PARTE

IDEA: usare $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$$\lim_{x\to\infty} 2x \ln\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x \ln\left(\frac{x^2+x-x+1}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2x \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2+x} + \frac{1-x}{x^2+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x \ln\left(1+\frac{1-x}{x^2+x}\right) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2+x}\right)}{\frac{1-x}{x^2+x}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1-x}{x^2+x}\cdot 2x}_{\to -2} = -2$$

se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ senza annullarsi in un intorno di x_0, escluso il punto x_0 stesso (cioè nei casi più frequenti), valgono le seguenti equivalenze per $x \to x_0$

$$\sin f(x) \sim f(x) \qquad \tan f(x) \sim f(x) \qquad 1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2}f^2(x)$$

$$e^{f(x)}-1 \sim f(x) \qquad [1+f(x)]^\alpha - 1 \sim \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \ln(1+f(x)) \sim f(x)$$

450 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2(\sqrt[7]{1+3x}-1)} = \frac{0}{0}$ F.I. $\left[\frac{7}{6}\right]$

$$\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^2\left((1+3x)^{1/7}-1\right)} \sim \frac{\cancel{x}\cdot\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot\frac{1}{7}3\cancel{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7}{6}$$

per $x \to 0$

Quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^2\left(\sqrt[7]{1+3x}-1\right)} = \frac{7}{6}$

539 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{x^3-x^4} = \frac{0}{0}$ F.I. $\left[\frac{1}{4}\right]$

$$\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{4}}-1}{x^3-x^4} \sim \frac{\frac{1}{4}\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{4}$$

quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{x^3-x^4} = \frac{1}{4}$

per $x \to 0$

infatti $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}(1-x)}{\cancel{x^3}} = 1$

cioè $x^3-x^4 \sim x^3$ per $x \to 0$

541 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tan x} = \dfrac{0}{0}$ F.I. [1]

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tan x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1 + 1 - e^{\sin x}}{\tan x} =$$

per $x \to 0$

$$= \frac{e^{\sin 2x} - 1 - (e^{\sin x} - 1)}{\tan x} \sim \frac{e^{\sin 2x} - 1 - (e^{\sin x} - 1)}{x} =$$

$$= \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \xrightarrow[\text{per } x \to 0]{} 2 - 1 = 1$$

A PARTE

$$\frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} \sim \frac{\sin 2x}{x} \sim \frac{2x}{x} = 2 \qquad \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \sim \frac{\sin x}{x} \sim \frac{x}{x} = 1$$

per $x \to 0$

quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\tan x} = 1$

491 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\cos x - 1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ F.I. [3]

METODO "VECCHIO"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin^2 x - \cos x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x - 1} - \frac{2\sin^2 x}{\cos x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(- \frac{1-\cos x}{1-\cos x} \right) - \lim_{x\to 0} \frac{2 \overbrace{\sin^2 x}^{1}}{\cos x - 1} \cdot \frac{x^2}{x^2} = -1 + 4 = 3$$

525 $\lim_{x \to -1} (x+2)^{\frac{2}{x+1}} = 1^{\infty}$ F.I. $[e^2]$

$$= \lim_{x\to -1} \left(1 + 1 + x\right)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2} = e^2$$

$\frac{1}{t} = 1 + x$

$t = \frac{1}{1+x}$ se $x \to -1$ si ha che $t \to \infty$

METODO ALTERNATIVO

$$\lim_{x\to -1} (x+2)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{x\to -1} e^{\frac{2}{x+1}\ln(x+2)} = e^2$$

A PARTE

$$\frac{2\ln(x+2)}{x+1} = \frac{2\ln(1+x+1)}{x+1} \sim \frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 2$$

per $x \to -1$

OSSERVAZIONE SUI POLINOMI

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ POLINOMIO DI GRADO n $(a_n \neq 0)$

1) per $x \to \infty$ $\quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \sim a_n x^n$

2) per $x \to 0$ la somma di 2 monomi (o più) è asintotica a quello di grado minore

ES.

per $x \to 0$ $\quad 3x^2 - 7x^3 + 5x^4 \sim 3x^2$