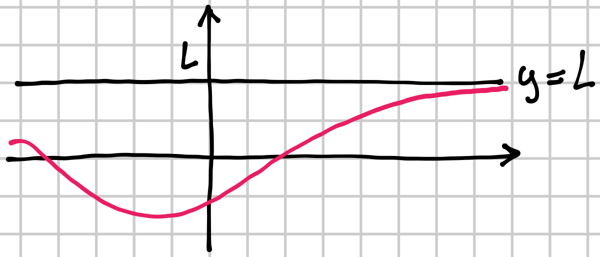
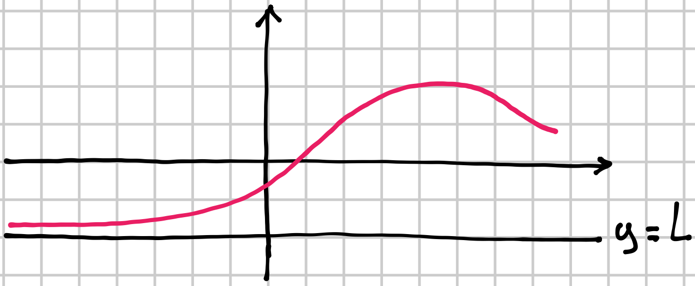
ASINTOTI ORIZZONTALI E VERTICALI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ $\quad L \in \mathbb{R}$

La retta $y = L$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to +\infty$ di f

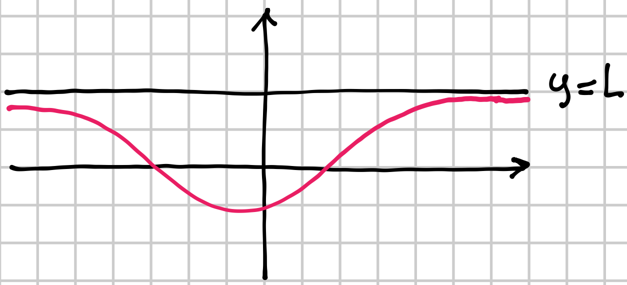


Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ $\quad L \in \mathbb{R}$, la retta $y = L$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to -\infty$ (di f)



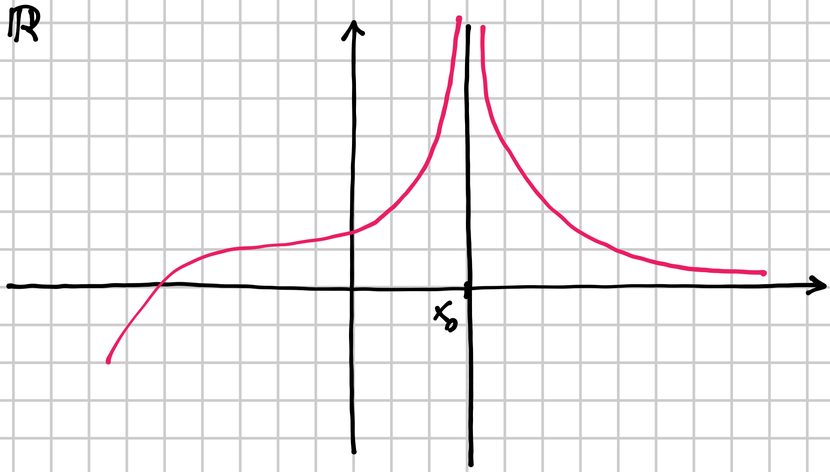
Se $y = L$ è asintoto sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ si può scrivere

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

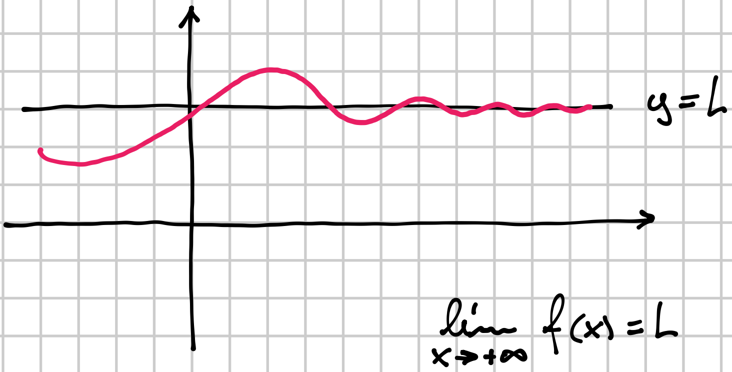


Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ si ha che la retta $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE

$x_0 \in \mathbb{R}$



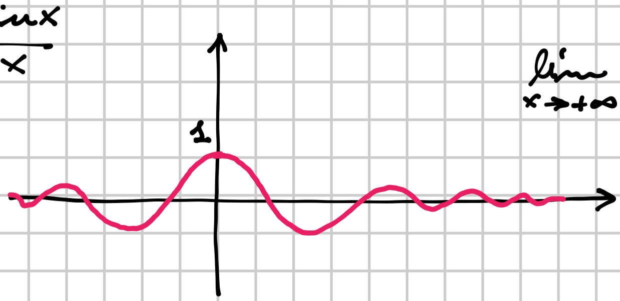
In una situazione del tipo:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

le oscillazioni si smorzano attorno a L. Anche in questo caso $y=L$ è un asintoto per $x\to+\infty$ della funzione

Ad es. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$y=0$ è asintoto per $x\to\infty$

513 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2\sin^2 x}{\ln(1+4x^4)} = \frac{0}{0}$ F.I. $\left[\frac{1}{2}\right]$

$$\frac{2x^2\sin^2 x}{\ln(1+4x^4)} \sim \frac{2\cancel{x^2}\cdot\cancel{x^2}}{4\cancel{x^4}} = \frac{1}{2} \quad \text{quindi } \lim_{x\to 0}\frac{2x^2\sin^2 x}{\ln(1+4x^4)} = \frac{1}{2}$$

per $x\to 0$

620 $\lim_{x\to -2} \frac{\ln(x^2+4x+5)}{\ln(x+3)^{100}} = \frac{0}{0}$ F.I. $[0]$

$$\frac{\ln(x^2+4x+5)}{\ln(x+3)^{100}} = \frac{\ln(1+(x+2)^2)}{100\ln(1+(x+2))} \sim \frac{(x+2)^{\cancel{2}}}{100\,\cancel{(x+2)}} = \frac{x+2}{100} \to 0$$

per $x\to -2$

616 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+\sin x}{5x+x^4\cos x} = \frac{0}{0}$ F.I. $\left[\frac{1}{5}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(\underset{\to 0}{2x} + \underset{\to 1}{\frac{\sin x}{x}}\right)}{\cancel{x}\left(5 + \underset{\to 0}{x^3}\,\underset{\to 1}{\cos x}\right)} = \frac{1}{5}$$

617 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2+2\sin x}{e^{2x}-1} = \frac{0}{0}$ F.I. $[1]$

$$\frac{1-\cos x^2}{e^{2x}-1} + \frac{2\sin x}{e^{2x}-1}$$

1) $\frac{1-\cos x^2}{e^{2x}-1} \sim \frac{\frac{1}{2}x^4}{2x} = \frac{1}{4}x^3 \to 0$

per $x\to 0$

2) $\frac{2\sin x}{e^{2x}-1} \sim \frac{2x}{2x} = 1$

per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 + 1 = 1$$

618 $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x + \sin 2x + 1 - \cos 4x}{-2x^4 + \sin^2 x} = \frac{0}{0}$ F.I. [$+\infty$]

$$\frac{2x}{-2x^4+\sin^2 x} + \frac{\sin 2x}{-2x^4+\sin^2 x} + \frac{1-\cos 4x}{-2x^4+\sin^2 x}$$

$$\quad 1 \qquad\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\qquad 3$$

1) $$\frac{2x}{-2x^4+\sin^2 x} = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(-2x^2 + \frac{\sin^2 x}{x^2}\right)} = \frac{2}{\underbrace{x}_{0^+}\left(\underbrace{-2x^2}_{0^-} + \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}\right)} \to +\infty$$

per $x \to 0^+$

2) $$\frac{\sin 2x}{-2x^4+\sin^2 x} \sim \frac{2x}{-2x^4+\sin^2 x} \to +\infty$$

per $x \to 0^+$

3) $$\frac{1-\cos 4x}{-2x^4+\sin^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{x^2\left(-2x^2+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)} = \frac{8\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\underbrace{-2x^2}_{0} + \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}\right)} = \frac{8}{1} = 8$$

per $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty + \infty + 8 = +\infty$$

Teorema 4.1 – Gerarchia degli infiniti

Per ogni numero reale $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$ si ha che nell'elenco che segue ogni funzione è, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine superiore rispetto a quelle che la precedono

$$(\ln x)^{\alpha} \qquad x^{\beta} \qquad e^{\varepsilon x}$$

INFINITO "PIÙ DEBOLE" RISPETTO A $x^{1/2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{1000}}{x^{1/2}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^{3500}} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{7}}{e^{5x}} = 0$$