645 $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I. [$+\infty$]

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^4} = +\infty$ $\quad e^t$ è un infinito di ordine superiore rispetto a t^4 per $t \to +\infty$

$t = -x$

$x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$

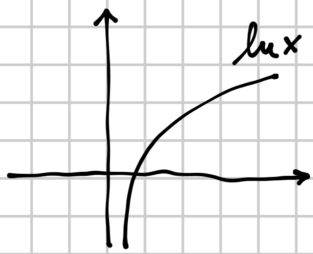
esponenziale con base $4 > 1$

648 $\lim_{x \to +\infty} \frac{3 \cdot 4^{x+1}}{x^{100}} = +\infty$ [$+\infty$]

4^x è un infinito di ordine superiore a x^{100} per $x \to +\infty$

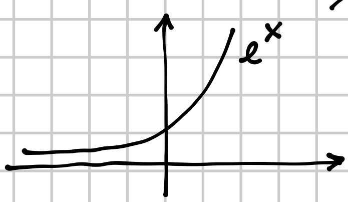
654 $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{4x}} =$ [0]

$= \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{4x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{4x} \ln x} = (*)$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{4x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$(*) = e^{-\infty} = 0^+$



662 $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x + x^2}{e^{2x}} =$ [0]

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{e^{2x}} + \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0 + 0 = 0$$

perché e^{2x} è infinito di ord. sup. risp. a $\ln^2 x$ e anche risp. a x^2

659 $\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = 0^0$ F.I. [1]

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x} = \dots = e^0 = 1$$

$\sin x \cdot \ln x \sim x \ln x$ per $x \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t} =$$

$t = \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0^+$, $t \to +\infty$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t^{-1}}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0^-$$

perché t è di ord. sup....

664 $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3 - \ln x + 1}$ [$+\infty$]

$$\frac{e^{2x}}{x^3 - \ln x + 1} \sim \frac{e^{2x}}{x^3} \to +\infty$$

per $x \to +\infty$

perché x^3 è di ordine inferiore risp. a e^{2x} per $x \to +\infty$

perché $x^3 - \ln x + 1 \sim x^3$ per $x \to +\infty$

infatti $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - \ln x + 1}{x^3} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 1 + 0 + 0 = 1$$

660 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0$ F.I. [1]

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{t-1}_{\sim t}}\ln(t) = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t} = 0^+$$

$1+\frac{1}{x}=t$ $\quad$ $t\to+\infty$ per $x\to 0^+$

$\Downarrow$

$\frac{1}{x}=t-1$

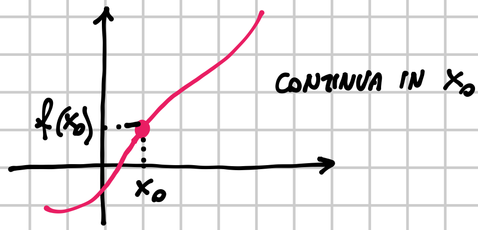
$\Downarrow$

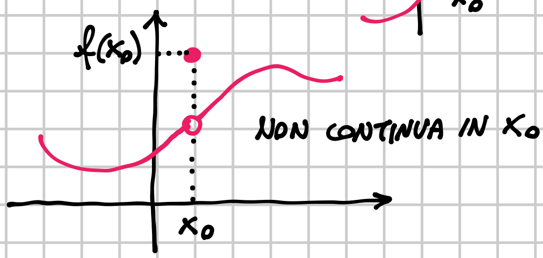
$x=\frac{1}{t-1}$

FUNZIONI CONTINUE

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ (di accumulazione per A)

Si dice che f è <u>CONTINUA in x_0</u> se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$





$f: A \to \mathbb{R}$ si dice <u>CONTINUA</u> se è continua in ogni $x \in A$.

<u>OSSERVAZIONE</u>

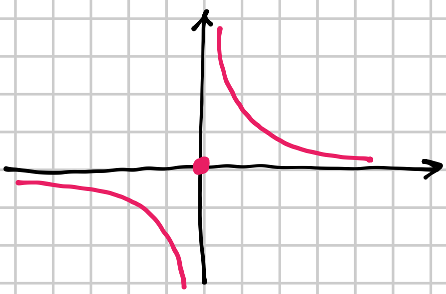
Se f <u>non</u> è definita in x_0, non si prende in considerazione il problema della continuità in x_0. In x_0 f non è continua né discontinua.

La funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

è <u>CONTINUA</u> (nel suo dominio)

La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f è DISCONTINUA IN 0 perché

$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ $\quad$ (si può dire che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$)

Dire se la funzione è continua o discontinua

762 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$[f(x) \text{ continua } \forall x \in \mathbb{R}]$

Somme, prodotti, quozienti, composizioni di funzioni elementari sono sempre funzioni continue

L'unico punto da studiare è il punto di raccordo $x = 1$

$f(1) = 1^3 - 2 = 1 - 2 = -1$

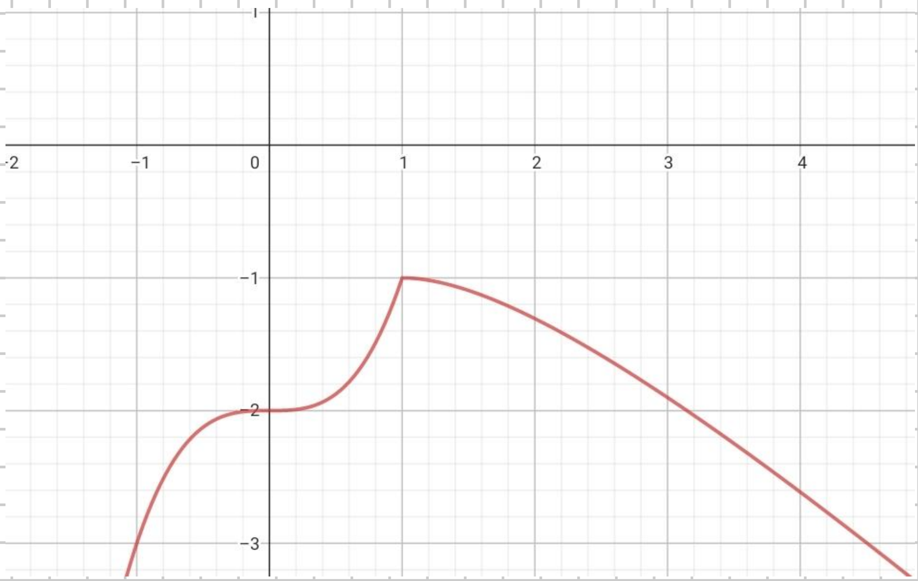
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 - 2) = 1 - 2 = -1$ (ovvio perché $x^3 - 2$ è continua)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x + \ln x) = -1 + \ln(1) = -1$

quindi $\underbrace{\lim_{x \to 1} f(x)}_{\text{esiste perché } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)} = -1 = f(1)$ cioè f è CONTINUA in 1

$\Downarrow$

f è CONTINUA



STUDIARE LA CONTINUITÀ

763 $f(x) = \begin{cases} xe^{x-2} & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

[$f(x)$ discontinua in $x = 2$]

Per $x \neq 2$ la f è sempre continua

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x e^{x-2} = 2 e^{2-2} = 2 \neq f(2)$$

f è discontinua in 2

(f non è continua nel suo dominio)

Determinare a, b in modo che f sia continua (su $\mathbb{R}$)

781 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{se } x \leq -3 \\ ax + b & \text{se } -3 < x \leq 2 \\ x^3 + a & \text{se } x > 2 \end{cases}$

[$a = 2$, $b = 6$]

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -3^+} (ax + b) = \lim_{x \to -3^-} (x^2 + x - 6)$$

$$-3a + b = 9 - 3 - 6$$

$$-3a + b = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} (x^3 + a) = \lim_{x \to 2^-} (ax + b)$$

$$8 + a = 2a + b$$

$$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ 8 + a = 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3a \\ 8 + a - 2a - 3a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3a \\ a = 2 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}}$$