Determinare a in modo che f sia continua

790 $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) - 2a & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{\cos x - e^x}{2ax} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $\quad \left[a = \pm\frac{1}{2}\right]$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} [\ln(1-x) - 2a] = -2a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - e^x}{2ax} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1 + 1 - e^x}{2ax} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{2ax} + \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^x}{2ax} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{\overbrace{1-\cos x}^{0}}{2ax}\right) + \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{\overbrace{e^x - 1}^{1}}{2ax}\right) = 0 - \frac{1}{2a} = -\frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad -2a = -\frac{1}{2a} \qquad a^2 = \frac{1}{4} \qquad \boxed{a = \pm\frac{1}{2}}$$

666 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^4 - 4x^2 + 6}$ $\quad [0]$

per $x \to +\infty$ $\quad x^4 - 4x^2 + 6 \sim x^4$

$$\frac{\ln x}{x^4 - 4x^2 + 6} \sim \frac{\ln x}{x^4} \longrightarrow 0$$

per $x \to +\infty$

perché $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a x^4 per $x \to +\infty$

663 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3e^x}{e^x-x^2}$ [3]

$$x^4+3e^x \sim 3e^x \quad \text{perché} \quad \frac{x^4+3e^x}{3e^x} = \underbrace{\frac{x^4}{3e^x}}_{\to 0} + 1 \to 1 \quad \text{per } x\to+\infty$$

perché $3e^x$ è inf. di ordine sup.

per $x\to+\infty$

Per lo stesso motivo $e^x - x^2 \sim e^x$ per $x\to+\infty$

$$\frac{x^4+3e^x}{e^x-x^2} \sim \frac{3\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 3$$

<u>ALTERNATIVO</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3e^x}{e^x-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(\underbrace{\frac{x^4}{e^x}}_{\to 0}+3\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\to 0}\right)} = 3$$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

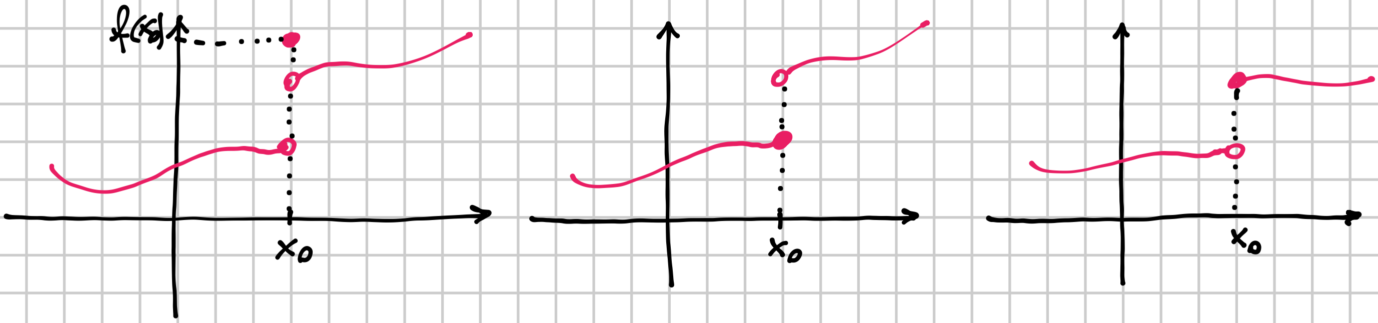
$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad \boxed{x_0 \in A}$ di accumulazione per A

f è DISCONTINUA in x_0 (oppure si dice che x_0 è un punto di DISCONTINUITÀ per f)

se <u>non vale</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

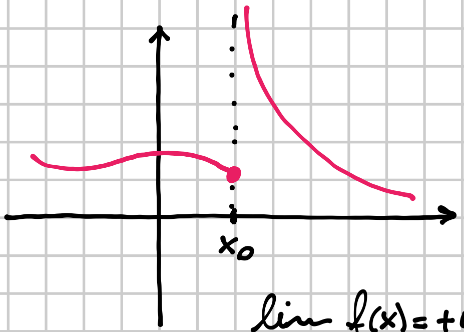
1) <u>PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 1ª SPECIE</u> (O DI TIPO SALTO)

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ esistono <u>finiti</u> ma sono diversi

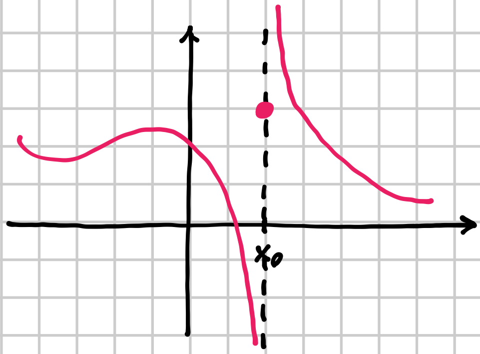


2) PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE

Almeno uno dei $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ non esiste o è infinito

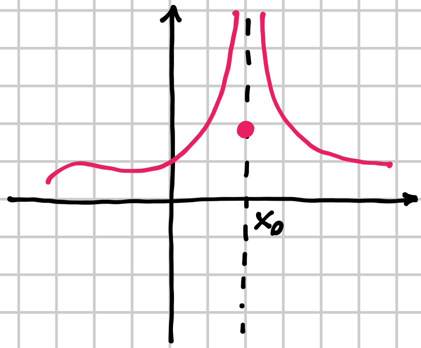


$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

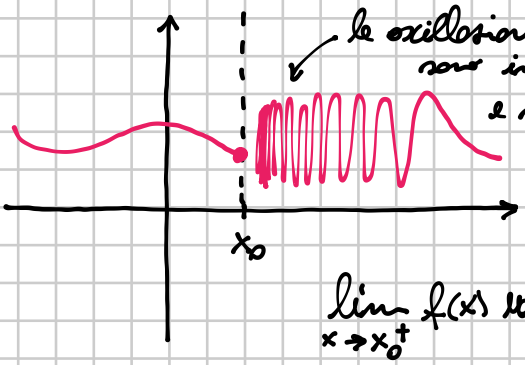


$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



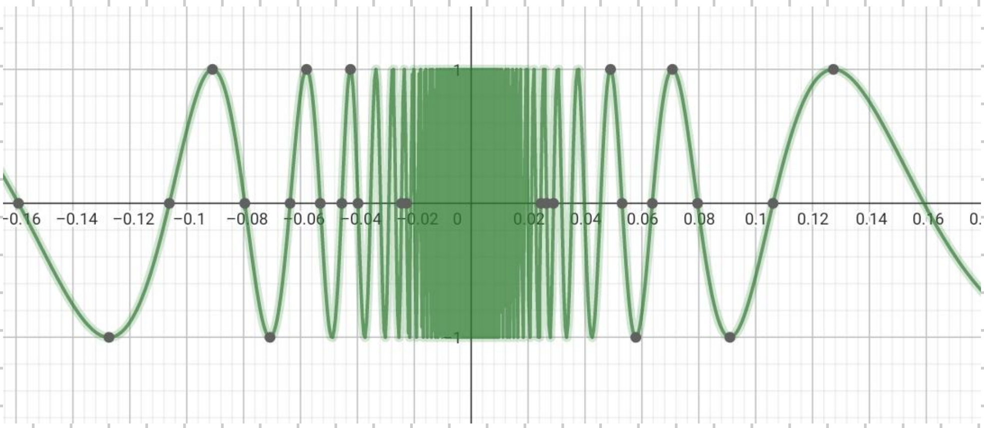
$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = +\infty$



le oscillazioni sono infinite e si avvicinano sempre più (con frequenza maggiore)

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ NON ESISTE

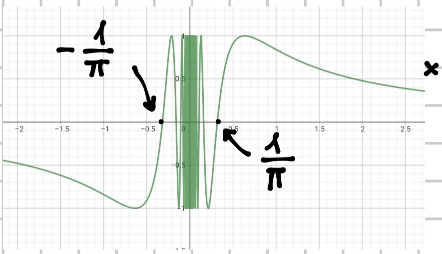
$\sin \frac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non ha limite per $x \to 0$



$\sin \frac{1}{x}$ interseca l'asse x nei punti tali che $\frac{1}{x} = k\pi \implies x = \frac{1}{k\pi}$

$x \to -\infty$

$\sin \frac{1}{x} \to 0^-$



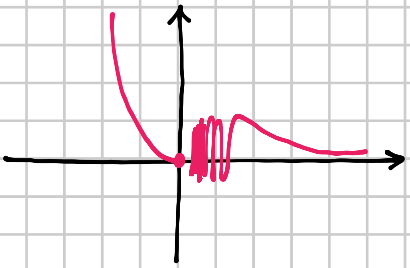
$x \to +\infty$

$\sin \frac{1}{x} \to 0^+$

$\pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots$

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x>0 \\ x^2 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

ha in $x=0$ un punto di discontinuità di 2ª specie

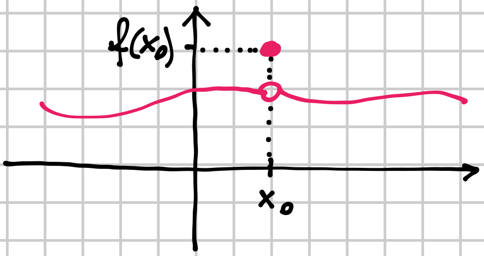


$\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ NON ESISTE

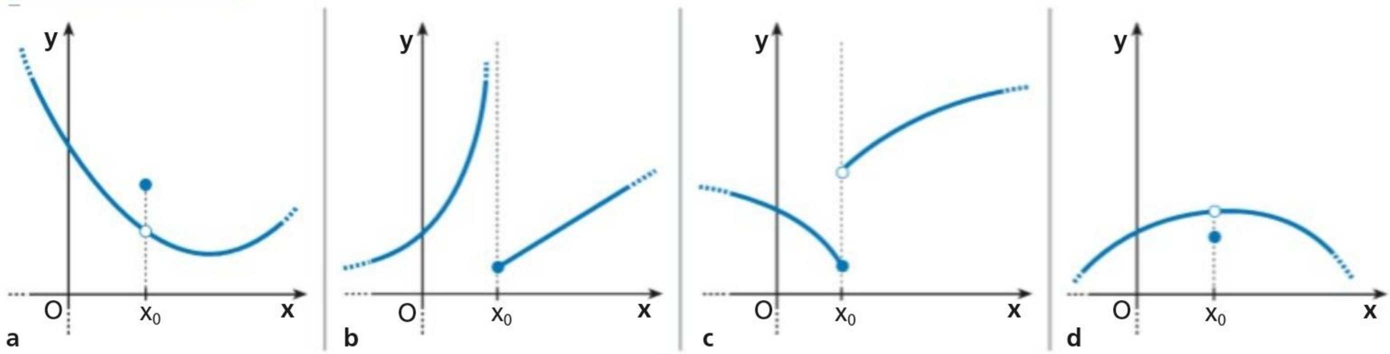
$\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

3) PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 3ª SPECIE (ELIMINABILE)

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ FINITO ma diverso da $f(x_0)$



845 LEGGI IL GRAFICO Per ciascun grafico classifica la discontinuità nel punto x_0.



a	b	c	d
3ª specie ELIMINABILE	2ª specie	1ª specie SALTO	3ª specie ELIMINABILE

850 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

$\Downarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} & \text{se } x \neq -2 \text{ e } x \neq 1 \\ 70 & \text{se } x = 1 \\ 100 & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

Studiare i punti di discontinuità di f

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \ldots = \frac{2}{3}$$

$f(1) = 70 \neq \frac{2}{3} \Rightarrow$ $x=1$ è un punto di discontinuità di 3ª specie

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(x+1)}^{-1}}{\underbrace{(x+2)}_{0^+}\cancel{(x-1)}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(x+1)}^{-1}}{\underbrace{(x+2)}_{0^-}\cancel{(x-1)}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x=-2$ è un punto di discontinuità di 2ª specie