TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

Data $f : A \to \mathbb{R}$, si dice <u>MASSIMO DI f</u> il massimo dell'insieme immagine di f

$\max f = \max(\operatorname{im} f)$ $\Rightarrow$ è il maggiore dei valori che la funzione assume

Si dice <u>MINIMO DI f</u> il minimo dell'insieme immagine di f

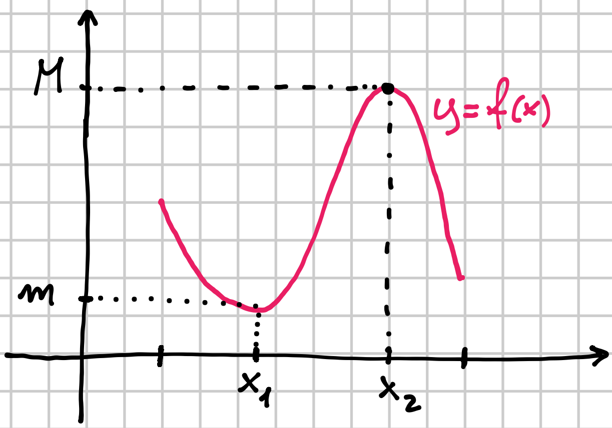
$\min f = \min(\operatorname{im} f)$ $\Rightarrow$ è il minore dei valori che la f. assume

Si dice <u>PUNTO DI MASSIMO</u> (o PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO) un elemento $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \max f$$

Si dice <u>PUNTO DI MINIMO</u> (o P. DI MINIMO ASSOLUTO) un elemento $x_0 \in A$ tale che

$$f(x_0) = \min f$$



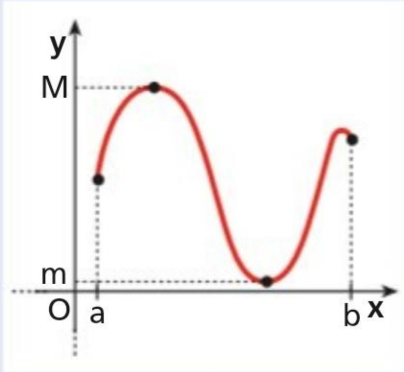
$M = \max f$ $\quad$ x_2 = punto di massimo

$m = \min f$ $\quad$ x_1 = punto di minimo

TEOREMA

Teorema di Weierstrass

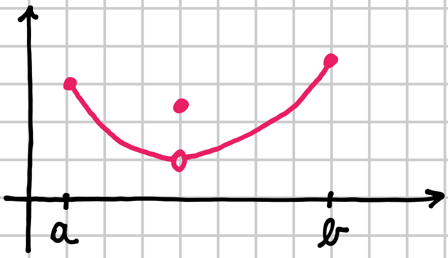
Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



OSSERVAZIONE

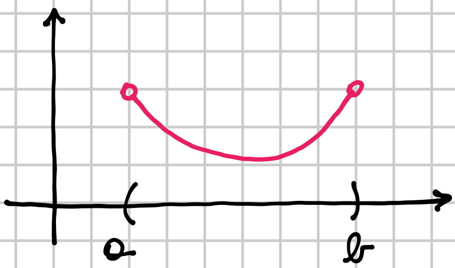
Se cadono le ipotesi di continuità o di dominio intervallo chiuso e limitato, la tesi del teorema può essere falsa:

1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ NON CONTINUA



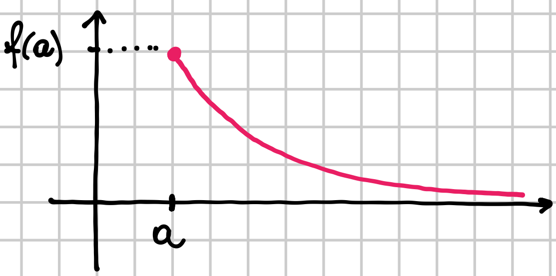
ha massimo
ma non ha minimo

2) f NON DEFINITA IN $[a,b]$ (chiuso limitato) ma continua



$f:(a,b)\to\mathbb{R}$

ha minimo
ma non ha massimo



$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$

ha massimo
ma non ha minimo

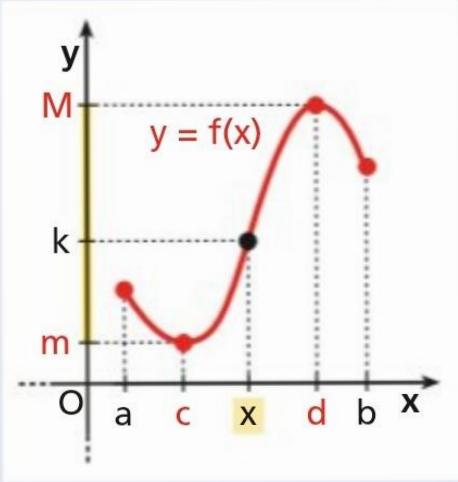
$\mathrm{im} f = (0, f(a)]$

TEOREMA

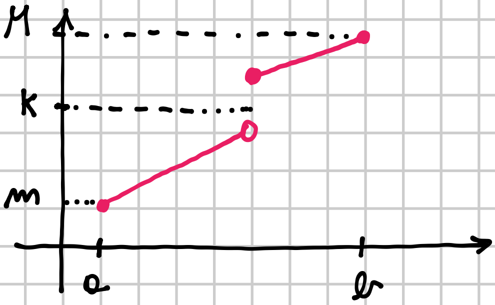
Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

(L'insieme immagine è un intervallo)



Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ non è continua, la tesi può essere falsa



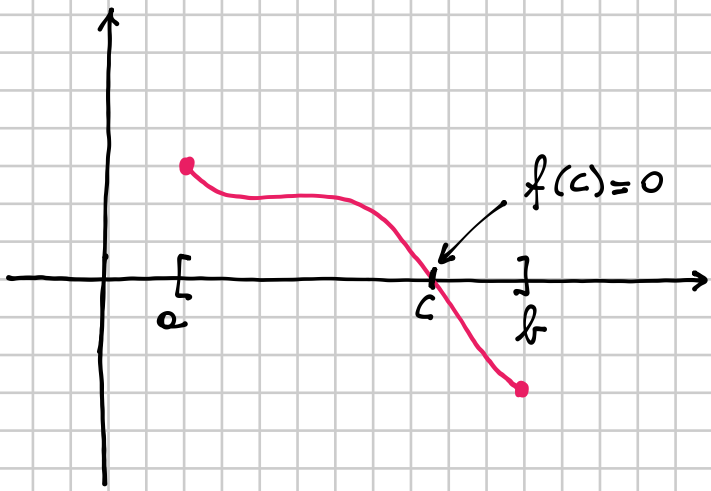
k non è l'immagine di alcun $x \in [a, b]$

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ in cui f si annulla, ossia $f(c) = 0$.

INTERNO AD $[a, b]$, cioè non è un estremo (né a né b)



Dimostrare che l'equazione ha almeno una soluzione nell'intervallo

833 $x^3 - e^{-x} = 0,$ in $[0; 2]$.

APPLICO IL TEOREMA DEGLI ZERI:

- Controllo che f sia continua definita in $[a, b]$ e che $f(a)$ ed $f(b)$ abbiano segni opposti

$f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 - e^{-x}$ è continua (somma e composizione di funzioni continue)

$f(0) = 0 - e^{-0} = -1 < 0$

$f(2) = 2^3 - e^{-2} = 8 - \frac{1}{e^2} > 0$

$\xRightarrow{\text{TH. ZERI}}$ $\exists c \in (0, 2)$ tale che $f(c) = 0$

quindi c è soluzione dell'equazione