842 Considera le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} -2e^{x-1} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x^2 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ -x-1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Dimostra che nell'intervallo [0; 2]:

a. le funzioni f e g non soddisfano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri;

b. la funzione $h(x) = f(x) + g(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(-2e^{x-1}\right) = -2 \quad \neq \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

f NON È CONTINUA IN 1

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x-1) = -2$$

g NON È CONTINUA IN 1

$$h(x) = \begin{cases} -2e^{x-1} + e^{x-1} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases} = \begin{cases} -e^{x-1} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(-e^{x-1}\right) = -1 \qquad \lim_{x\to 1^+} (x^2 - x - 1) = -1$$

$= h(1)$ h È CONTINUA IN $[0,2]$

$$h(0) = -e^{0-1} = -\frac{1}{e} < 0 \qquad h(2) = 4 - 2 - 1 = 1 > 0$$

segni opposti

Posso applicare il th. degli zeri e dire che $\exists\, c \in (0,2)$ tale che $h(c) = 0$

843 Considera la famiglia di funzioni $f(x) = x\ln(x - c)$, dove c è un parametro reale.

a. Trova il dominio e stabilisci se sono funzioni continue.

b. Determina per quali valori di c la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in $[0; 2]$.

c. Posto $c = -1$, determina il massimo M e il minimo m della funzione in $[0; 2]$.

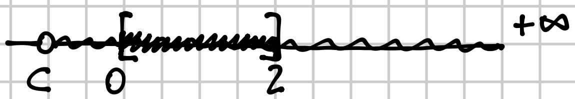
[a) D: $x > c$, sì; b) $c < 0$; c) $M = \ln 9$ e $m = 0$]

a) D: $x - c > 0 \quad x > c \Rightarrow D = (c, +\infty) \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x\ln(x-c)$ è continua nel suo dominio poiché "combinazione" di funzioni continue

b) $[0, 2] \qquad x - c > 0$

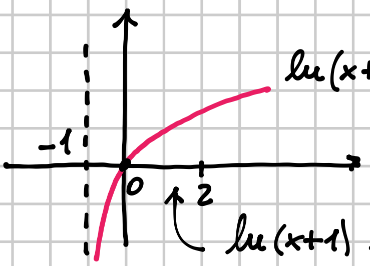
l'intervallo $[0,2]$ deve essere incluso in $(c, +\infty)$



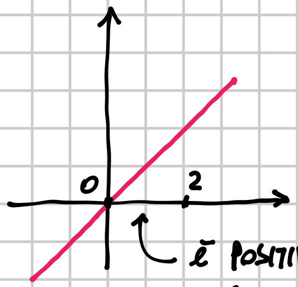
$\Downarrow$

affinché ciò accada deve essere $c < 0$

c) $c = -1 \qquad f(x) = x\ln(x+1) \qquad [0, 2]$



$\ln(x+1)$ è POSITIVA E STRETT. CRESCENTE IN $[0,2]$



è POSITIVA E STRETT. CRESCENTE IN $[0,2]$

Il loro prodotto in $[0,2]$ è ancora strett. crescente

$f(x) = x \cdot \ln(x+1)$ è continua in $[0,2] \Rightarrow$ APPLICO WEIERSTRASS e ho un max e un min

Siccome f è strett. crescente in $[0,2]$, il minimo è l'immagine del 1° estremo $x = 0$, il massimo è l'immagine del 2° estremo $x = 2$

$m = f(0) = 0 \cdot \ln 1 = 0 \qquad M = f(2) = 2\ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9$