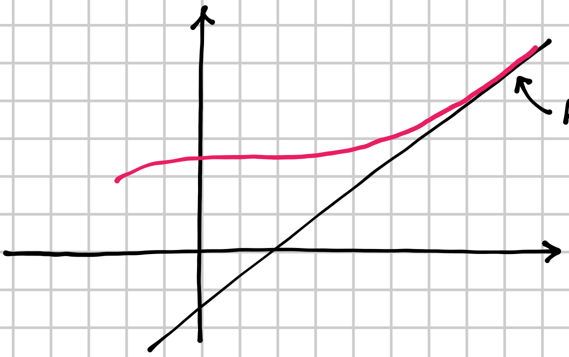
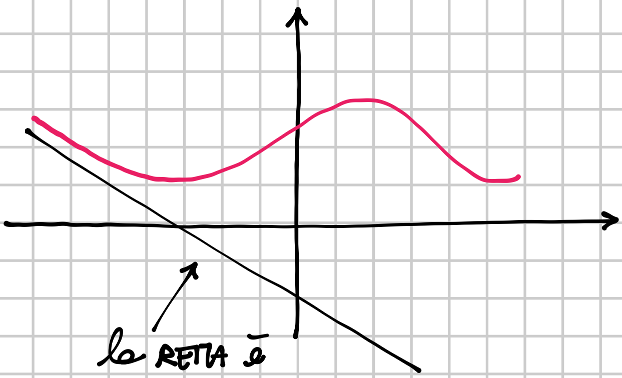
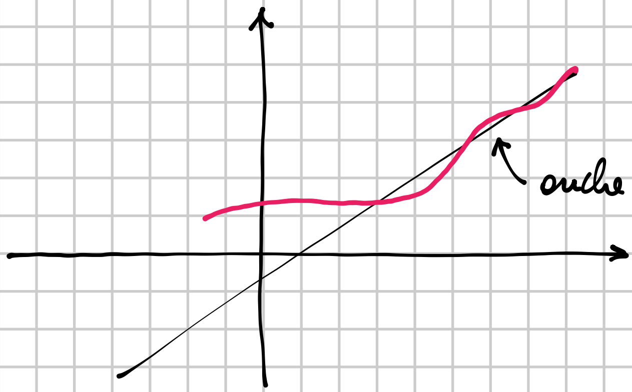
ASINTOTI OBLIQUI





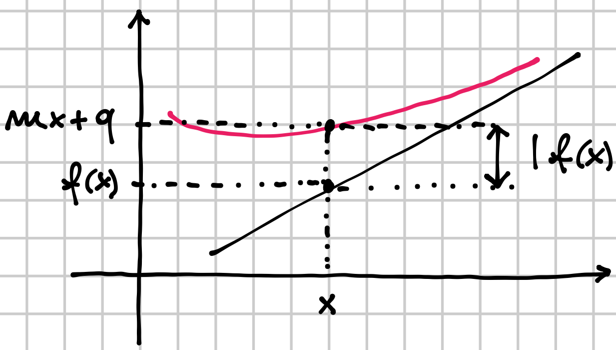


DEFINIZIONE

La retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO per la funzione f per $x \to +\infty$ (per $x \to -\infty$)

se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left| f(x) - (mx+q) \right| = 0$$



TEOREMA

La retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO per f per $x \to +\infty$ se e solo se

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

(stesso cosa per $x \to -\infty$).
Se uno dei due limiti non esiste oppure è infinito, non c'è l'asintoto obliquo.

DIMOSTRAZIONE

Sia f tale che $y = mx + q$ è il suo asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Allora, per definizione

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\frac{q}{x}}_{\to 0}\right] = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Viceversa, se valgono le due formule, allora, dalla seconda si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \implies \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$$

e quindi $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO

Trovare gli asintoti della funzione

992 $y = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x}$ $\left[x = 2,\ y = \frac{1}{2}x + 1\right]$

DEVO CONTROLLARE (COI LIMITI) SE IN $x=0$ E IN $x=2$ CI SONO ASINTOTI VERTICALI

$$f(x) = \frac{x(x^2-2)}{2x(x-2)}$$

$x \neq 0 \wedge x \neq 2$

DOMINIO

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

NEL CALCOLO DEL DOMINIO NON SEMPLIFICO

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2-2)}{2\cancel{x}(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-2}{2(x-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

IN $x=0$ NON C'È ASINTOTO VERTICALE PERCHÉ $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ CHE È FINITO

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x}(x^2-2)}{2\cancel{x}(x-2)} = \frac{2}{0} = \infty$$

la retta $x=2$ È ASINTOTO VERTICALE

in particolare:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-2}{2(x-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \ldots = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

CALCOLO I LIMITI A $\pm\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x}{2x^2-4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{4}{x}\right)} = +\infty$$

$$\frac{2}{x^2} \to 0 \qquad \frac{4}{x} \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots = -\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali (altrimenti avrei trovato valori finiti). È possibile che ci siano asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-2x}{2x^3-4x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\left(2 - \frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{x^2} \to 0 \qquad \frac{4}{x} \to 0$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 - 2x}{\underbrace{2x^2 - 4x}_{2x(x-2)}} - \frac{1}{2}x \right] =$$

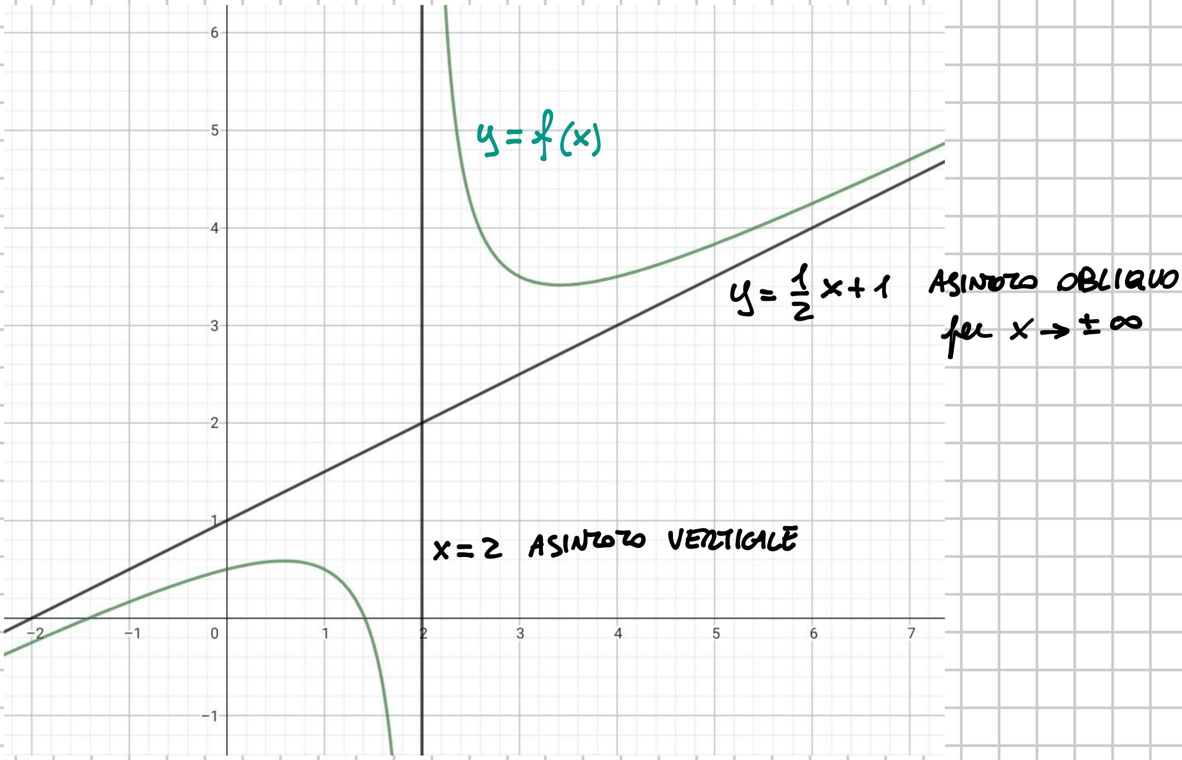
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x - x^2(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} - 2x - \cancel{x^3} + 2x^2}{2x^2 - 4x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 2x}{2x^2 - 4x} = \frac{2}{2} = 1$$

ASINTOTO OBLIQUO

$y = \frac{1}{2}x + 1$ per $x \to +\infty$

Per $x \to -\infty$ i passaggi sono identici. Quindi $y = \frac{1}{2}x + 1$ è asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$



Ricerca asintoti

980 $y = \dfrac{x+2}{|x|-2}$ $\quad [x = 2, y = \pm 1]$

$f(x) = \dfrac{x+2}{|x|-2}$ DOMINIO: $|x|-2 \neq 0 \quad |x| \neq 2 \quad x \neq \pm 2$

$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{|x|-2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x+2}{-x-2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x+2}}{-(\cancel{x+2})} = -1$ $\quad y = -1$ ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to -\infty$

$|x| = -x$
se $x \to -\infty$
(negativo)

$\lim_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{|x|-2} = \lim_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{-x-2} = \lim_{x \to -2^-} \dfrac{\cancel{x+2}}{-(\cancel{x+2})} = -1$

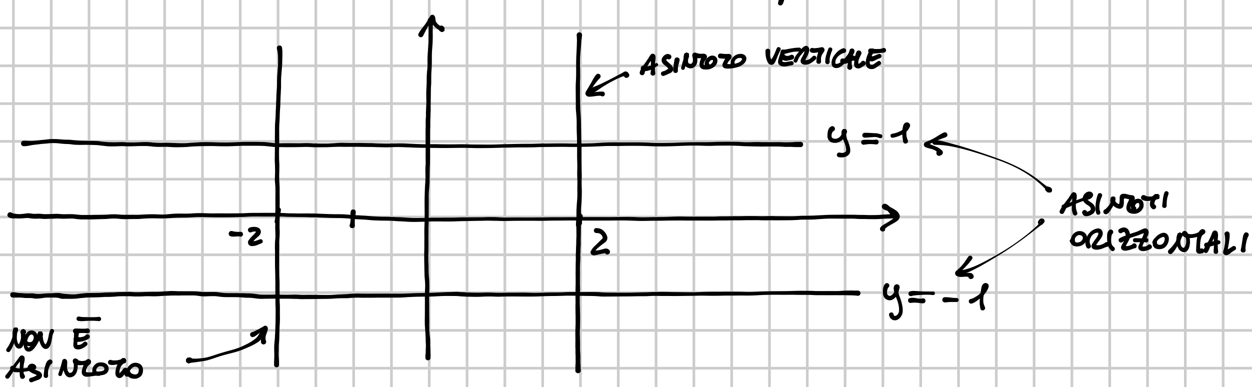
$\lim_{x \to -2^+} \dots = -1$ $\quad$ NON C'È ASINTOTO VERTICALE IN $x = -2$

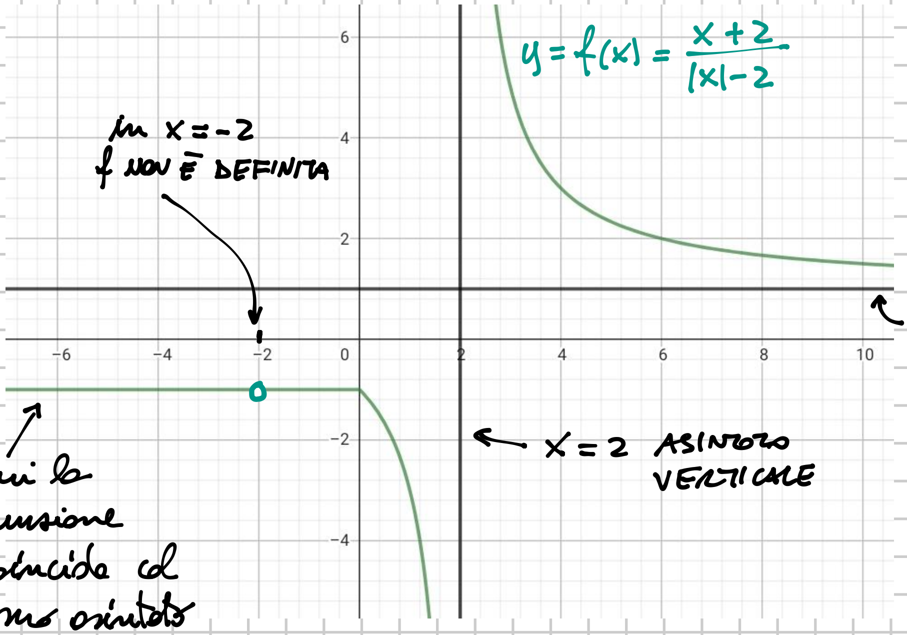
$\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{|x|-2} = \lim_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$ $\quad x = 2$ È ASINTOTO VERTICALE

$|x| = x$
perché $x = 2$
è positivo

$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{|x|-2} = \dots = \dfrac{4}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{|x|-2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-2} = 1$ $\quad y = 1$ È ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to +\infty$





$y=1$ ASINTOTO ORIZZ. per $x \to +\infty$

qui la funzione coincide col suo asintoto orizzontale per $x \to -\infty$