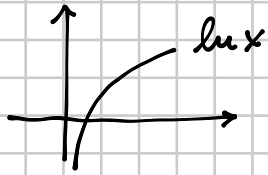
Trovare gli asintoti

997 $y = \dfrac{xe^x + 2\ln x}{e^x}$ $\quad [x = 0,\ y = x]$

$D = (0, +\infty)$



$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x + 2\ln x}{e^x} = \frac{0\cdot e^0 + 2\cdot(-\infty)}{e^0} = -\infty$$

$\Downarrow$

$x = 0$ è ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x + 2\ln x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\Big(\overset{\to +\infty}{x} + 2\overset{\to 0}{\frac{\ln x}{e^x}}\Big)}{\cancel{e^x}} = +\infty$$

$\downarrow$

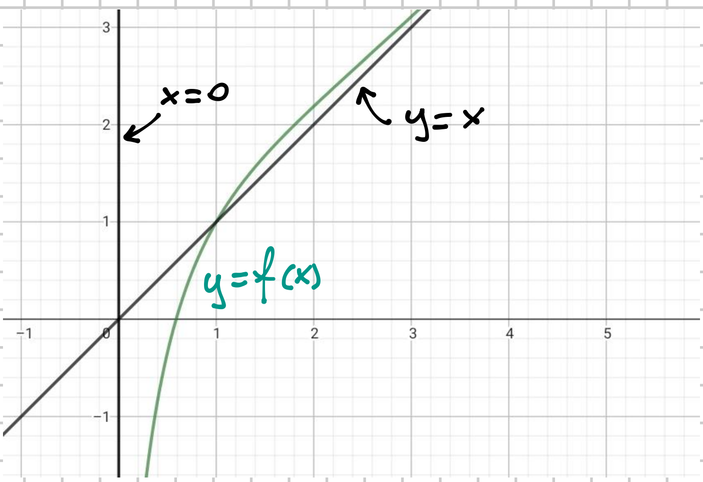
andiamo alla ricerca dell'asintoto obliquo (per $x\to+\infty$)

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{xe^x + 2\ln x}{xe^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{xe^x}\Big(1 + 2\overset{\to 0}{\frac{\ln x}{xe^x}}\Big)}{\cancel{xe^x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{xe^x + 2\ln x}{e^x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{xe^x} + 2\ln x - \cancel{xe^x}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{e^x} = 0$$

$y = mx + q \implies y = x$ è ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to +\infty$

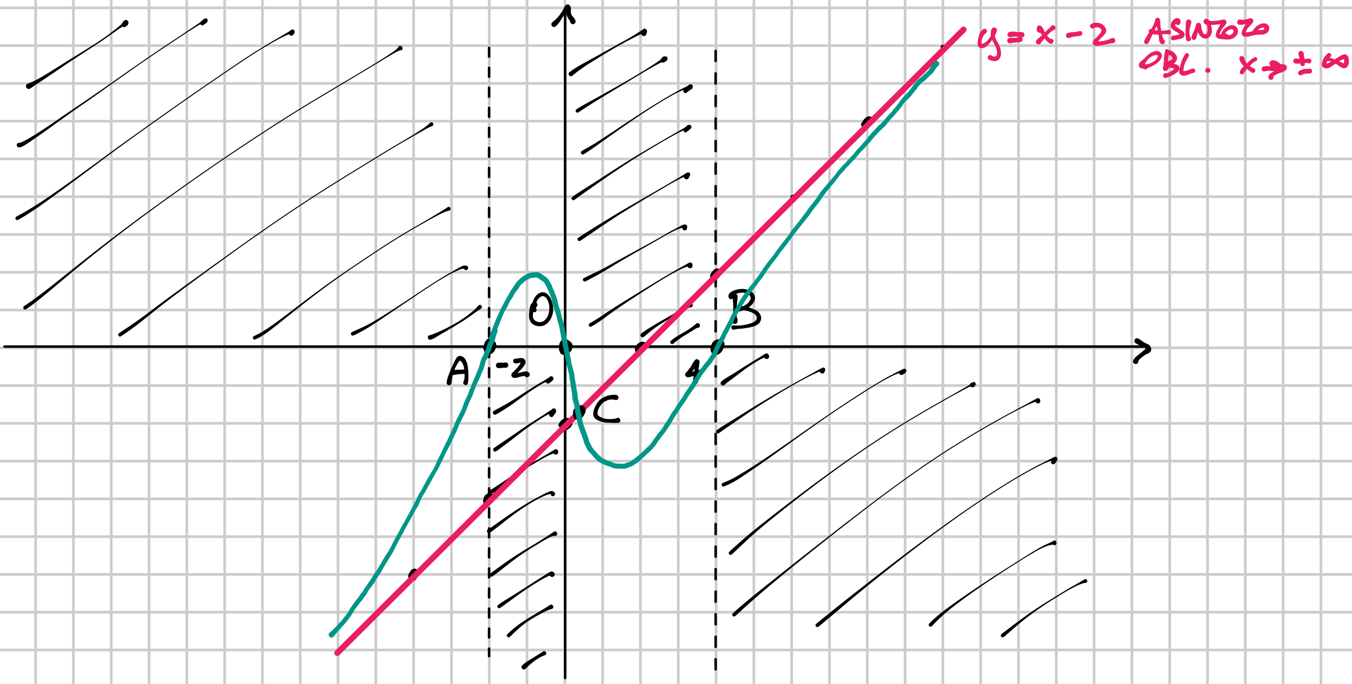


STUDIO DI FUNZIONE (GRAFICO PROBABILE)

1052 $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 8x}{x^2 + 1}$

1) DOMINIO: $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2) EVENTUALI SIMMETRIE (PARI/DISPARI): NÉ PARI NÉ DISPARI



3) ZERI DELLA FUNZIONE/INTERSEZIONI CON GLI ASSI CARTESIANI

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^3-2x^2-8x=0 \\ x(x^2-2x-8)=0 \\ x(x-4)(x+2)=0 \end{array}$$

$x=-2 \vee x=0 \vee x=4$

$A(-2,0)$ $O(0,0)$

$B(4,0)$

INT. ASSE $y \Rightarrow O(0,0)$

4) SEGNO DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} > 0 \implies x^3-2x^2-8x > 0$$

$$x(x-4)(x+2) > 0$$

		-2		0		4	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

5) LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} = +\infty$$

6) EVENTUALI ASINTOTI OBLIQUI

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2-8x}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2-8x}{x^3+x} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}-2x^2-8x-\cancel{x^3}-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2-9x}{x^2+1} = -2$$

Osservo che si hanno gli stessi limiti per $x \to -\infty$

$y = x-2$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

7) EVENTUALI INTERSEZIONI CON L'ASINTOTO OBLIQUO

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1} \\ y = x-2 \end{cases}$$

$$x-2 = \frac{x^3-2x^2-8x}{x^2+1}$$

$$(x-2)(x^2+1) = x^3-2x^2-8x$$

$$\cancel{x^3}+x-\cancel{2x^2}-2 = \cancel{x^3}-\cancel{2x^2}-8x$$

$$9x = 2$$

$$x = \frac{2}{9} \qquad y = \frac{2}{9} - 2 = -\frac{16}{9}$$

$$C\left(\frac{2}{9}, -\frac{16}{9}\right)$$

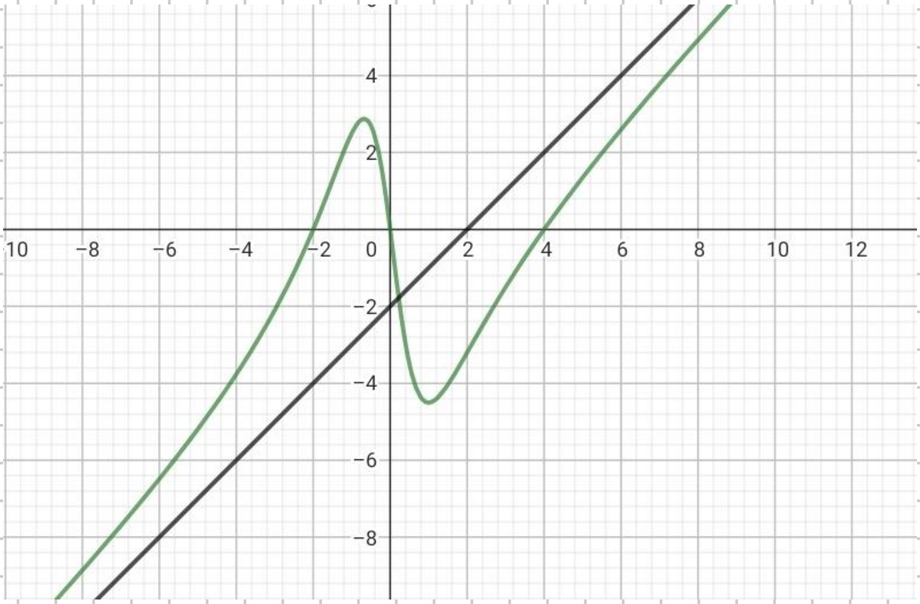


GRAFICO REALE