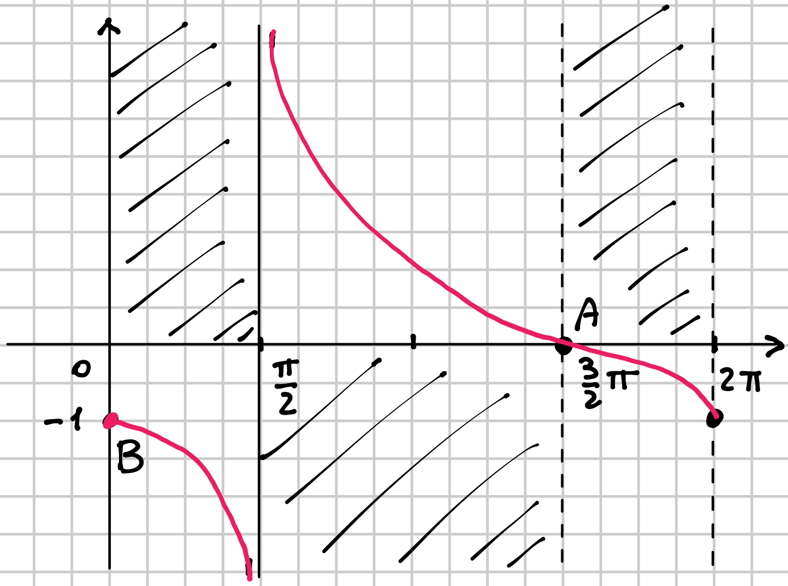
STUDIARE LA FUNZIONE

1069 $y = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

1) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

Essendo periodica di periodo 2π, mi limito a studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (togliendo $\frac{\pi}{2}$), poi la replico

$D' = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$



nel grafico non possiamo dire altro

2) INTERS. ASSI

ASSE X $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{\cos x}{\sin x - 1} \end{cases} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \underbrace{x = \frac{\pi}{2}}_{\text{N.ACC.}} \lor x = \frac{3}{2}\pi \qquad A\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$

in $[0, 2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

perché fuori dal dominio

INTERS. ASSE y

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{0-1} = -1 \end{cases} \qquad B(0, -1)$

3) SEGNO

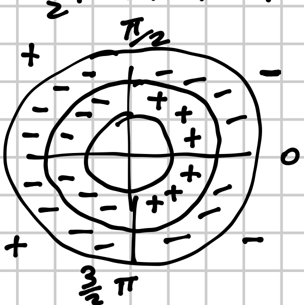
$\dfrac{\cos x}{\sin x - 1} > 0$

$N > 0 \qquad \cos x > 0 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \lor \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

$D > 0 \qquad \sin x - 1 > 0$

$\sin x > 1 \qquad \nexists x$

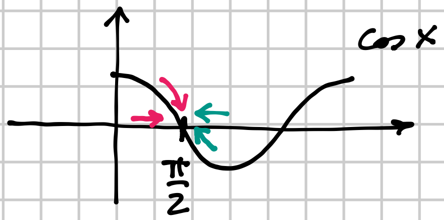
	0 – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – π	π – $\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ – 2π
N	+	−	−	+
D	−	−	−	−
	−	+	+	−

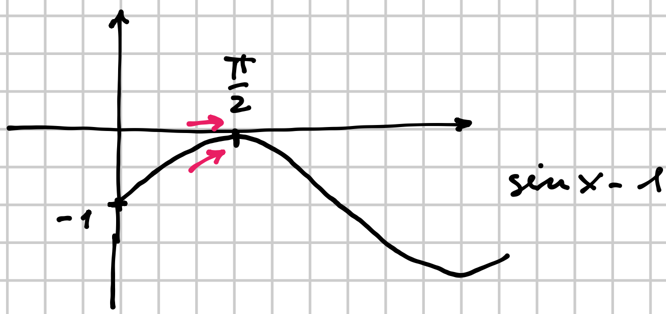


4) LIMITI $\qquad D' = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{1}{0-1} = -1 \qquad \lim_{x\to 2\pi^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{\cos 2\pi}{\sin 2\pi - 1} = -1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{0^+}{0^-} \quad \text{F.I.}$$



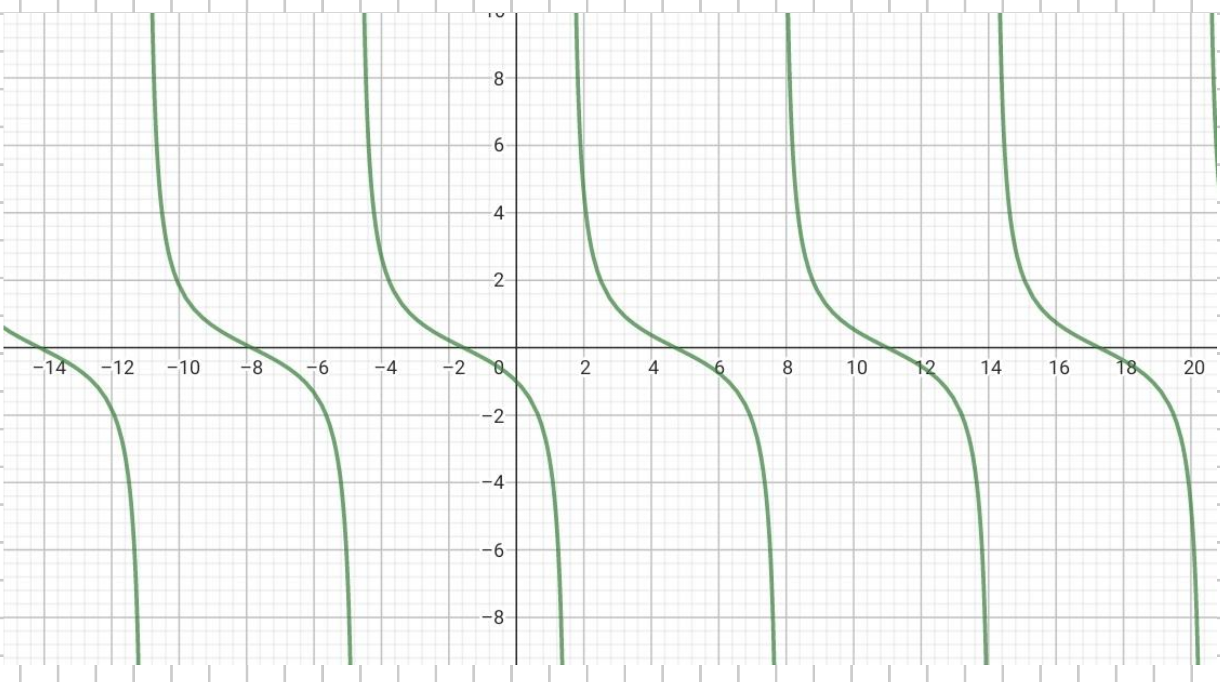


$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x(\sin x + 1)}{\sin^2 x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cancel{\cos x}(\sin x + 1)}{-\cos^{\cancel{2}} x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x + 1}{-\cos x} = \frac{1+1}{-0^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

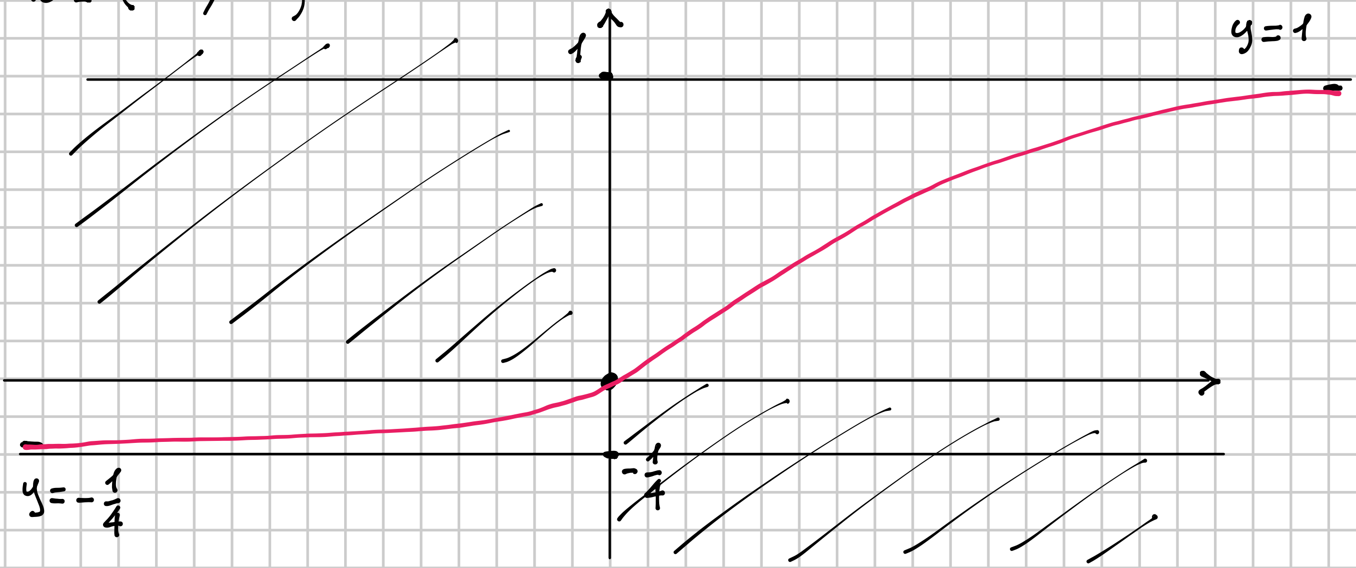
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \dots = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x + 1}{-\cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x = \frac{\pi}{2}$ ASINTOTO VERTICALE



1066 $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 4}$

1) DOMINIO $= (-\infty, +\infty)$



2) INT. ASSI

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 4} \end{cases} \qquad \frac{e^x - 1}{e^x + 4} = 0 \qquad e^x - 1 = 0 \qquad e^x = 1 \qquad x = 0$$

$O(0,0)$ unica intersezione con gli assi

3) SEGNO

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 4} > 0 \implies e^x - 1 > 0 \implies e^x > 1 \implies x > 0$$

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ - & + \end{array}$$

4) LIMITI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 4} = \frac{0 - 1}{0 + 4} = -\frac{1}{4}$$

$y = -\frac{1}{4}$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 4} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{4}{e^x}\right)} = 1$$

$y = 1$ ASINTOTO ORIZZ.

1076 REALTÀ E MODELLI **Pizza da asporto** La temperatura T di una pizza tolta dal forno è posta nel cartone, che si trova alla temperatura di 21 °C, diminuisce nel tempo secondo la legge:

$$T(t) = 21 + (T_0 - 21)e^{-\frac{t}{20}},$$

dove T_0 è la temperatura iniziale della pizza, misurata in °C, e t è il tempo misurato in minuti.

a. Se $T_0 = 110$ °C, qual è la temperatura della pizza dopo 30 minuti?

b. Calcola $\lim_{t \to +\infty} T(t)$ e interpreta il risultato fisicamente.

c. Disegna il grafico probabile della funzione $T(t)$ considerata.

d. Dopo quanti minuti la temperatura della pizza è dimezzata?

[a) $T \simeq 41$ °C; b) 21 °C; d) $\simeq 19$ minuti]

a) $T(t) = 21 + (110-21)e^{-\frac{t}{20}} = 21 + 89e^{-\frac{t}{20}}$

$T(30) = 21 + 89e^{-\frac{30}{20}} = 40{,}85\ldots \simeq 41 \to T \simeq 41°C$

b) $\lim_{t \to +\infty}\left(21 + 89e^{-\frac{t}{20}}\right) = 21 + 89e^{-\infty} = 21 + 89 \cdot 0 = 21$

$\to 21°C$

Quindi la pizza tende ad assumere la temperatura del cartone (ambiente). Nella realtà la raggiunge prima di $+\infty$!

c) STUDIO DI FUNZIONE $\quad T(t) = 21 + 89e^{-\frac{t}{20}}$

1) DOMINIO $D = [0, +\infty) \quad t \geq 0$

2) INT. ASSI

$21 + 89e^{-\frac{t}{20}} = 0$ IMPOSSIBILE

ASSE t DELLE ASCISSE

$T(0) = 21 + 89e^0 = 21 + 89 = 110$

ASSE T DELLE ORDINATE

3) SEGNO

$21 + 89e^{-\frac{t}{20}} > 0 \quad \forall t \geq 0$

4) LIMITI

$\lim_{t \to +\infty} T(t) = 21 \qquad \lim_{t \to 0^+} T(t) = 110$

$T = 21$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$$T(t) = 21 + 89e^{-t/20}$$

d) $T_0 = 110$

$$21 + 89e^{-\frac{t}{20}} = \underset{T_0/2}{55}$$

$$89e^{-\frac{t}{20}} = 34 \qquad e^{-\frac{t}{20}} = \frac{34}{89}$$

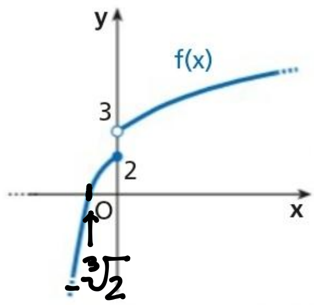
$$-\frac{t}{20} = \ln\left(\frac{34}{89}\right) \qquad t = -20\ln\left(\frac{34}{89}\right) = 19{,}24\ldots \simeq 19$$

92 Osserva il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 + a & \text{se } x \leq 0 \\ b[\ln(1+x)+2] & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

a. Determina il valore di a e b.

b. Studia il segno di f e calcola i limiti agli estremi del dominio, verificando graficamente i risultati ottenuti.

c. Individua un intervallo nel quale sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass e del teorema degli zeri. [a) $a = 2, b = \frac{3}{2}$; b) $f(x) > 0$: $x > -\sqrt[3]{2}$]



a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b[\ln(1+x)+2] = b \cdot 2$ (DAL CALCOLO)

deve essere $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ (DAL GRAFICO) $\longrightarrow$ $2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^3 + a) = a$ (DAL CALCOLO)

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ (DAL GRAFICO) $\longrightarrow a = 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3}{2}[\ln(1+x)+2] & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

b) SEGNO

1 $\begin{cases} x^3 + 2 > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $\cup$ 2 $\begin{cases} \frac{3}{2}[\ln(1+x)+2] > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

1 $\begin{cases} x^3+2>0 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 > -2 \\ x \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\sqrt[3]{2} \\ x \leq 0 \end{cases}$ $-\sqrt[3]{2} < x \leq 0$

$-\sqrt[3]{2}$ 0

− | + |

2 $\begin{cases} \cancel{\frac{3}{2}}[\ln(1+x)+2] > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \ln(1+x) > -2 \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1+x > e^{-2} \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \underbrace{-1+e^{-2}}_{\text{negativo}} \\ x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x > 0$

0

| +

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{2}\left[\ln(x+1) + 2\right] = +\infty$$

c) WEIERSTRASS $\Rightarrow$ qualsiasi intervallo chiuso che <u>NON</u> contenga 0 come punto interno o come 1° estremo:

$\left[-\sqrt[3]{2}, 0\right], [1,5], [2,3], \dots$

<u>NON</u> $[-1,2], [0,1], \dots$

TH. ZERI $\Rightarrow$ qualsiasi intervallo chiuso in cui f è continua che contenga $-\sqrt[3]{2}$ come punto interno:

$[-1,0], [-7,0], \left[-1000, -\sqrt[18]{2}\right], \dots$