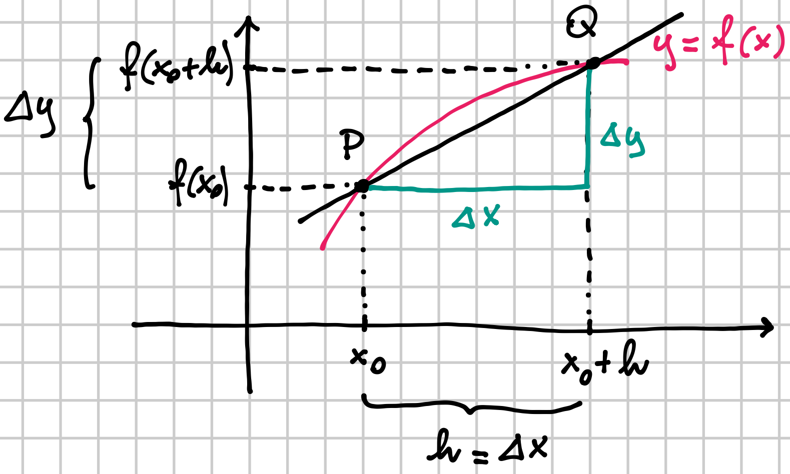
RAPPORTO INCREMENTALE

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo

$x_0 \in I$ $\quad$ $\boxed{h \neq 0}$ tale che $\quad x_0 + h \in I$



RAPPORTO INCREMENTALE DI f RIFERITO A x_0 E ALL'INCREMENTO h

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

È il COEFFICIENTE ANGOLARE della retta PQ

$P(x_0, f(x_0))$ $\quad$ $Q(x_0+h, f(x_0+h))$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = x^2$

$x_0 = 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{\cancel{1} + h^2 + 2h - \cancel{1}}{h} =$$

$$= \frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = 2 + h$$

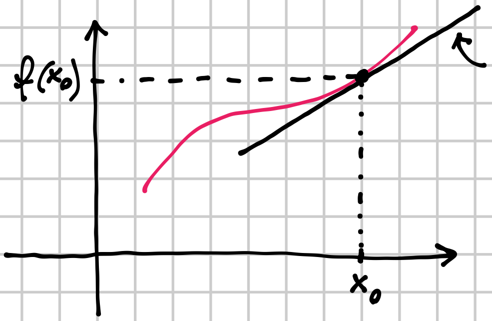
Se x_0 è generico

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{\cancel{x_0^2} + h^2 + 2x_0 h - \cancel{x_0^2}}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(h + 2x_0)}{\cancel{h}} = 2x_0 + h$$

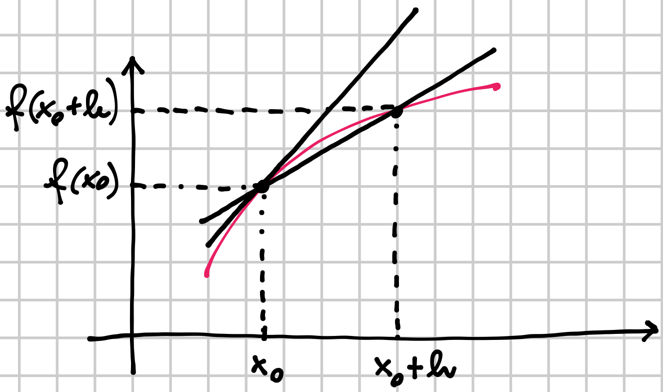
DERIVATA IN UN PUNTO

PROBLEMA: Data $y = f(x)$ e $x_0 \in \text{dom} f$, trovare la TANGENTE al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$



IDEA

Considerare incrementi h sempre più piccoli $h \to 0$



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = coeff. angolare della secante

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

= coeff. angolare della tangente → DERIVATA DI f IN x_0

e si denota con $f'(x_0)$

DEFINIZIONE

$f : I \to \mathbb{R}$ (I → INTERVALLO) $x_0 \in I$ si dice DERIVATA DI f IN x_0 il limite (se esiste)

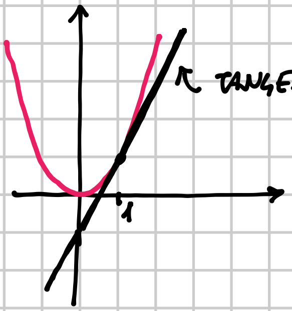
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Diciamo che f è DERIVABILE IN x_0 se $f'(x_0)$ esiste FINITA.

ESEMPI

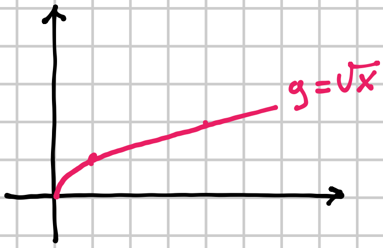
1) Calcolare la derivata di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2$ in $x_0=1$ e in x_0 generico

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dots=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$



$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dots=\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

2) Calcolare la derivata di $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\sqrt{x}$ in $x_0=0$



$$f'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{h}=$$

h non può essere <0

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$f'(0)=+\infty$ ma f non è derivabile in 0

$\Downarrow$

la tangente è verticale (retta $x=0$)

$$\boxed{\text{Una notazione alternativa per la derivata è } \frac{dy}{dx}}$$

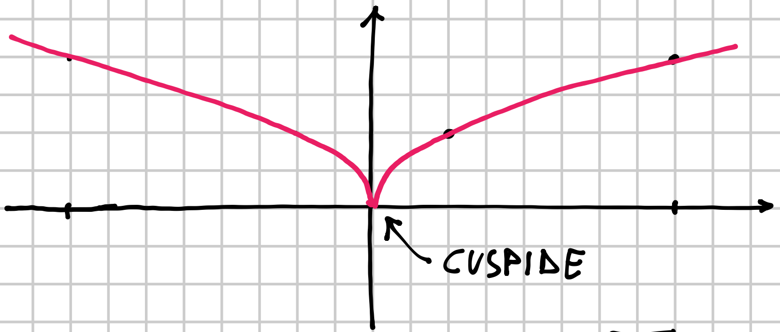
Altre notazioni sono Df, $\frac{d}{dx}f$, y'

Il limite del rapporto incrementale esiste se sono uguali i due limiti per $h\to 0^+$ e $h\to 0^-$.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0) \quad \text{DERIVATA DESTRA}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_-(x_0) \quad \text{DERIVATA SINISTRA}$$

Calcoliamo le derivate destra e sinistra in $x_0 = 0$ di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$f(x) = \sqrt{|x|}$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|0+h|}-\sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

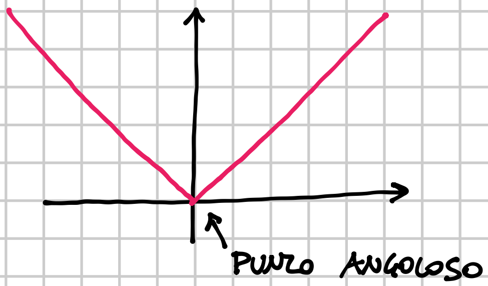
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|0+h|}-\sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h}\cdot\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{-h}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{-h}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{-h}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$f'_+(0) = +\infty \quad f'_-(0) = -\infty$

In generale, quando derivata destra e derivata sinistra sono infiniti opposti in x_0, si dice che x_0 è una CUSPIDE

Consideriamo $f(x) = |x|$



$f'_+(0) = 1$

$f'_-(0) = -1$

In generale, se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono <u>diverse</u> e almeno una delle due è finita, si dice che x_0 è un <u>PUNTO ANGOLOSO</u>

Sia $\sqrt{x}$ che $\sqrt{|x|}$ che $|x|$ <u>NON</u> sono derivabili in 0.