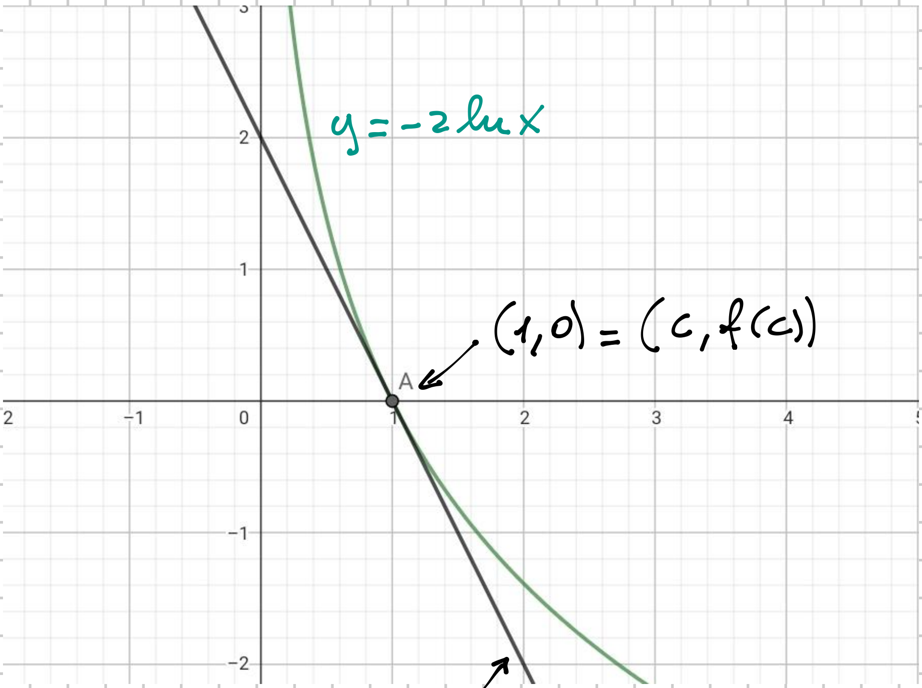
Calcolare la derivata nel punto

47 $f(x) = -2\ln x, \qquad c = 1. \qquad [-2]$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\ln(1+h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -2 \underbrace{\frac{\ln(1+h)}{h}}_{1} = -2$$



$y = -2x + 2$

$(x_0, f(x_0))$

$$\underbrace{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{EQUAZIONE DELLA TANGENTE}}$$

Nel nostro caso

$$y - 0 = -2(x-1)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -2x + 2$$

Calcolare la derivata nel punto

48 $f(x) = e^{x-1}, \qquad c = 1. \qquad [1]$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\cancel{1}+h-\cancel{1}} - e^0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

TEOREMA IMPORTANTE

$f: I \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in I \qquad f$ è DERIVABILE IN x_0 ($f'(x_0)$ esiste finita)

$\Rightarrow f$ è CONTINUA IN x_0

DIMOSTRAZIONE

Ricordiamo che f è CONTINUA IN x_0 se $x_0 \in \operatorname{dom} f$ (di accumulazione) e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Osserviamo che la stessa cosa si può rendere scrivendo $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

$(x = x_0 + h)$

Sia f derivabile in x_0. Allora:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \left[f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \Bigg[\underbrace{\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0) \text{ FINITA!}} \cdot \underbrace{h}_{0}}_{0} + f(x_0) \Bigg] = f(x_0) \qquad \text{QED}$$

DEFINIZIONE

Sia f una funzione derivabile in almeno un punto del suo dominio.

Si dice FUNZIONE DERIVATA o semplicemente DERIVATA la funzione f' che ad ogni $x \in \operatorname{dom} f$ in cui f è derivabile associa la derivata $f'(x)$.

$$\operatorname{dom} f' = \{ x \in \operatorname{dom} f \text{ tali che } \overbrace{f'(x) \text{ esiste finito}}^{f \text{ è derivabile in } x} \}$$

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Ad esempio calcoliamo la (funzione) derivata della funzione $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x$$

1

TEOREMA DI LINEARITÀ DELLE DERIVATE

$f, g : I \to \mathbb{R}$ DERIVABILI $\qquad c \in \mathbb{R}$ (costante)

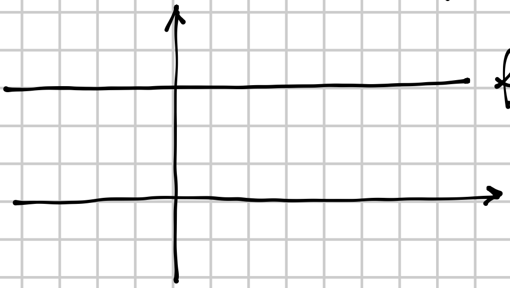
1) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

2) $[c f(x)]' = c f'(x)$

ESEMPIO

$f(x) = 3e^x \qquad f'(x) = 3(e^x)' = 3e^x$

La derivata di una funzione costante è ovunque nulla



$f(x) = c \qquad f'(x) = 0$

$f(x) = 5e^x + 7 \qquad f'(x) = (5e^x + 7)' = (5e^x)' + (7)' =$

$= 5e^x + 0 = 5e^x$