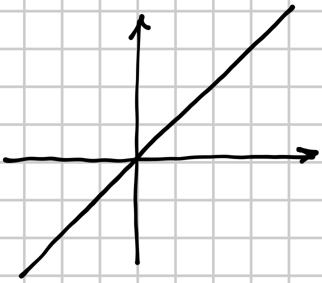
DERIVATE FONDAMENTALI

1) $f(x) = c$ (costante) $\qquad f'(x) = 0$

2) $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

3) $f(x) = x$



$f'(x) = 1$ infatti $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

4) $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$x > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right]^\alpha - x^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha}{x} \cdot \underbrace{\frac{\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right]}{\frac{h}{x}}}_{\to \alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1}$$

$$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$$

Si può generalizzare alle potenze a esponente naturale:

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N} \qquad f'(x) = n\, x^{n-1} \qquad x \in \mathbb{R}$

Vale anche per radici (esponenti razionali) ed esponenti negativi

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Calcolare la derivata di $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 4x^2 + 5\sqrt{x} + 10$

$$f'(x) = 15x^4 + 6x^2 - 8x + \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

Per trovare il coeff. angolare della tangente di f in $x=1$, sostituisco nella funzione derivata

$$f'(1) = 15 \cdot 1^4 + 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + \frac{5}{2\sqrt{1}} = 15 + 6 - 8 + \frac{5}{2} =$$

$$= 13 + \frac{5}{2} = \frac{31}{2}$$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\qquad x_0 = 1 \qquad f(x_0) = f(1) = 3+2-4+5+10$

$= 16$

$$y - 16 = \frac{31}{2}(x-1)$$

5) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \overbrace{(\cos h - 1)}^{\to 0}}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \overbrace{\sin h}^{\to 1}}{h} = \cos x$$

$$f'(x) = \cos x$$

6) $f(x) = \cos x$ .... allo stesso modo $\qquad f'(x) = -\sin x$

7) $f(x) = \ln x \qquad x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x} \cdot x} \xrightarrow{} 1 \quad = \frac{1}{x}$$

TEOREMA

$f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili

1) PRODOTTO $\qquad [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

2) QUOZIENTE

$g(x) \neq 0 \qquad \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

DIMOSTRAZIONE DI 1

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} g(x+h) \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} + \lim_{h \to 0} f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

perché g è continua in x, essendo derivabile

DIMOSTRAZIONE DI 2

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{h\, g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h\, g(x+h)g(x)} + \lim_{h\to 0} \frac{-f(x)[g(x+h) - f(x)]}{h\, g(x+h)g(x)} =$$

$f'(x)$ $\quad$ $g(x)$ (g continua) $\quad$ $g'(x)$ $\quad$ $g(x)$

$$= \frac{g(x)f'(x)}{g^2(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$