DERIVATA DI $\tan(x)$

$$\left[\tan(x)\right]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

si può anche scrivere

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLE REGOLE

1) Calcolare la derivata di $f(x) = 3x^5 \cdot \sin x$

$$f'(x) = (3x^5)' \cdot \sin x + 3x^5 \cdot (\sin x)' =$$

$$= 15x^4 \cdot \sin x + 3x^5 \cos x$$

2) Calcolare la derivata di $f(x) = 3xe^x + \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = (3xe^x)' + \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = (3x)' \cdot e^x + 3x \cdot (e^x)' + \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \ln x}{(x^2)^2} =$$

$$= 3e^x + 3xe^x + \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} - 2x \ln x}{x^4} =$$

$$= 3e^x + 3xe^x + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = 3e^x(1+x) + \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

240 $y = \dfrac{x^3 - \ln x}{x}$ $\left[y' = \dfrac{2x^3 - 1 + \ln x}{x^2} \right]$

$$y' = \frac{\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) \cdot x - 1 \cdot (x^3 - \ln x)}{x^2} = \frac{3x^3 - 1 - x^3 + \ln x}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 1 + \ln x}{x^2}$$

244 $y = \dfrac{xe^x - 4}{1 + xe^x}$ Calcolare la derivata

$$y' = \frac{(xe^x - 4)'(1 + xe^x) - (1 + xe^x)'(xe^x - 4)}{(1 + xe^x)^2} =$$

$$= \frac{(1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 0)(1 + xe^x) - (0 + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x)(xe^x - 4)}{(1 + xe^x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(1 + xe^x) - (e^x + xe^x)(xe^x - 4)}{(1 + xe^x)^2}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(1 + \cancel{xe^x} - \cancel{xe^x} + 4)}{(1 + xe^x)^2} = \frac{5e^x(x + 1)}{(xe^x + 1)^2}$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad f, g \text{ derivabili}$$

ESEMPIO

$$y = \sin(x^2+2) \qquad y' = \overbrace{\cos(x^2+2)}^{\sin'(x^2+2)} \cdot (x^2+2)' = 2x\cos(x^2+2)$$

277 $y = \ln(x^3+2x^2+6)$ $\left[y' = \dfrac{x(3x+4)}{x^3+2x^2+6}\right]$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x^3+2x^2+6}}_{\ln'(x^3+2x^2+6)} \cdot \underbrace{(3x^2+4x)}_{(x^3+2x^2+6)'} = \frac{x(3x+4)}{x^3+2x^2+6}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA

$$[f(g(x))]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{h}$$

$z = g(x)$

$\Delta z = g(x+h) - g(x)$

$g(x+h) = \Delta z + g(x) = \Delta z + z$

$h \to 0 \Rightarrow \Delta z \to 0$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}}_{f'(z)} \cdot \underbrace{\frac{\Delta z}{h}}_{g'(x)} =$$

$$= f'(z) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

OSSERVAZIONE

$y = e^{x^2-x} \qquad y = e^t \qquad t = x^2 - x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot (2x-1) = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$$