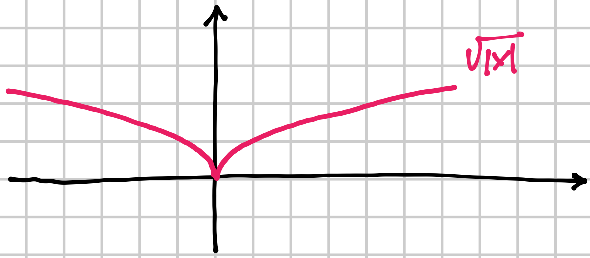
Studiamo i punti di non derivabilità di

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{|x|}$

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=\sqrt{|x|}$ ha una CUSPIDE in $x=0$



$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{|0+h|}-\sqrt{|0|}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cancel{\sqrt{h}}}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|0+h|}-\sqrt{|0|}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{-h}}{h}\cdot\frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{-h}}=$$

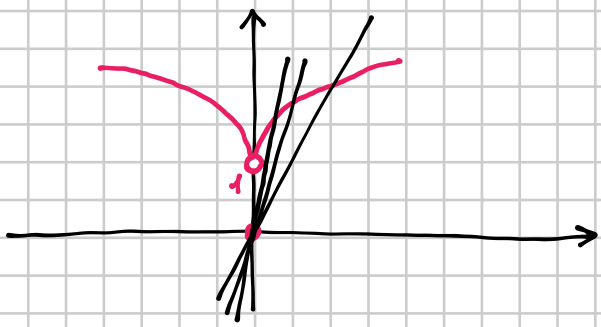
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{-h}}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-h}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Dato che f è CONTINUA IN $x=0$, in $x=0$ c'è una CUSPIDE.

<u>OSSERVAZIONE</u>

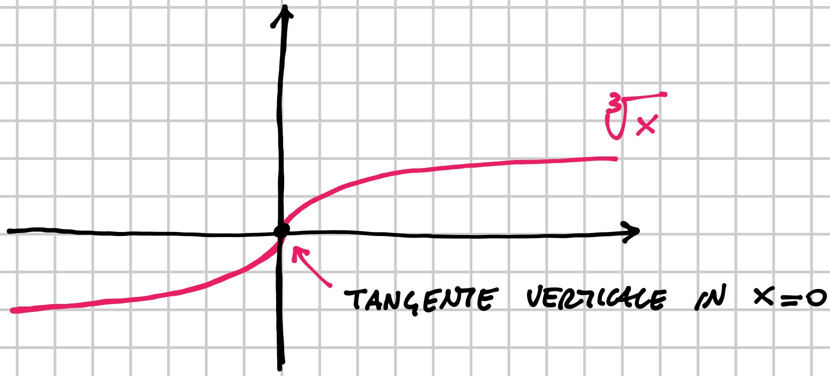
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}+1 & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

è DISCONTINUA IN $x=0$



$f'_+(0)=+\infty$ e $f'_-(0)=+\infty$ ma $x=0$ non è una CUSPIDE perché in 0 f non è continua

$g(x) = \sqrt[3]{x}$



$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h \sqrt[3]{h^2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h} \sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Dato che g è CONTINUA IN 0, si ha che g ha in 0 UN FLESSO A TANGENTE VERTICALE

OSSERVAZIONE

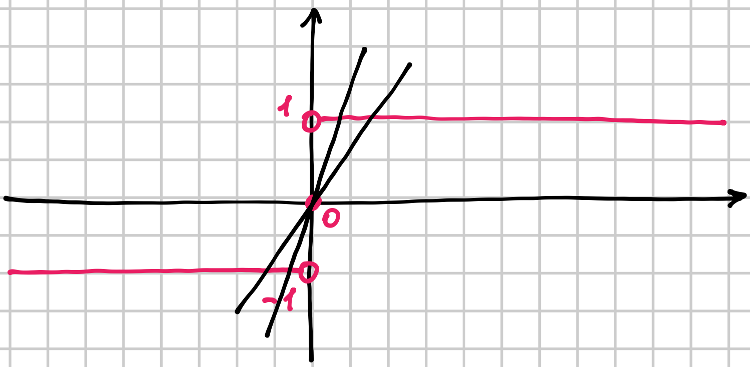
$$\underbrace{f \text{ derivabile in } x_0}_{\exists f'(x_0) \text{ FINITA}} \Longrightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Se la derivata in x_0 è infinita, la funzione può essere in effetti discontinua

esempio: $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

in $x=0$ la derivata esiste ed è $+\infty$, ma la funzione è discontinua in 0



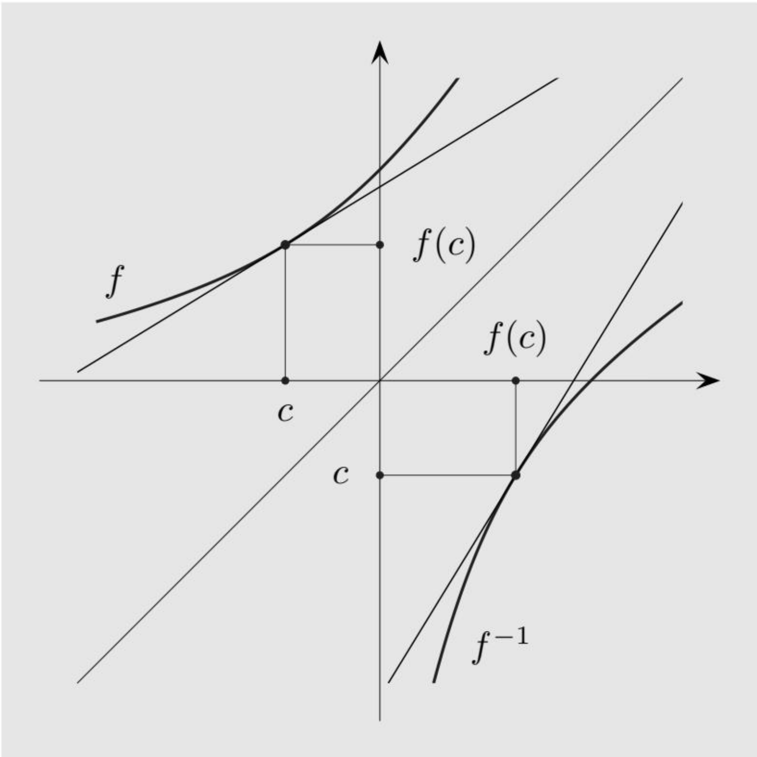
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{h} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

3.3.15 Teorema (sulla derivata di funzione inversa). Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$, $c \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile. Se f è derivabile in c e $f'(c) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(c)$ e

$$(f^{-1})'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}\,.$$



$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(d)\big)}$$

In pratica vale la formula $\quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

APPLICAZIONE

Calcoliamo la derivata di $f^{-1}(x) = \arcsin x$ $\qquad f(x) = \sin x$

$-1 \leq x \leq 1 \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \cos x$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1$$

in $x = \pm 1$ $\arcsin x$ non è derivabile

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$-1 < x < 1$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

vista come inverso dell'esponenziale

derivata dell'esponenziale calcolata nel logaritmo

OSSERVAZIONE SULLE NOTAZIONI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$y = \arctan x \qquad x = \tan y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$