Calcolare la derivata

396 $y = \dfrac{x\ln x}{\sqrt{x}}$ $\left[y' = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right]$

$$y' = \frac{(x\ln x)'\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x\ln x}{x} = \frac{\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\, x\ln x}{x} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x} - \frac{\cancel{x}\ln x}{2\cancel{\sqrt{x}}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}}}{x} = \frac{\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}\ln x}{2}}{x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}\ln x}{2} + \sqrt{x}}{x} = \frac{\frac{\sqrt{x}\ln x + 2\sqrt{x}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{x}\ln x + 2\sqrt{x}}{2x} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x}}(\ln x + 2)}{2\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

553 $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2e^x}$ $\left[y' = -\dfrac{\sin x}{e^x}\right]$

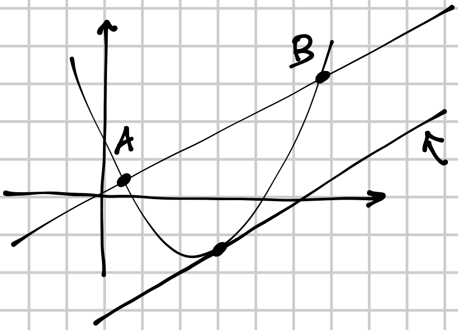
$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)2e^x - 2e^x(\sin x + \cos x)}{4e^{2x}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}e^x[\cancel{\cos x} - \sin x - \sin x - \cancel{\cos x}]}{\underset{2}{\cancel{4}}e^{2x}} = -\frac{\cancel{2}\sin x}{\cancel{2}e^x} =$$

$e^{2x} \rightarrow (e^x)^2$

$$= -\frac{\sin x}{e^x}$$

686 Una corda della parabola $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$ congiunge i punti di ascissa $x=-1$ e $x=3$. Trova l'equazione della retta tangente alla parabola parallela a questa corda. $\left[y=-\frac{3}{2}(x-1)\right]$



retta da trovare

$x=-1 \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+2=5 \qquad A(-1,5)$

$x=3 \Rightarrow \quad y=\frac{9}{2}-\frac{15}{2}+2=-1 \qquad B(3,-1)$

$$m_{AB}=\frac{5-(-1)}{-1-3}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$$

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$

$y'=x-\frac{5}{2}$

$x-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$ trovo l'ascissa del punto di tangenza

$x=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \rightsquigarrow y=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2=0$

$T(1,0)$ PUNTO DI TANGENZA

$y-0=-\frac{3}{2}(x-1) \qquad \boxed{y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}}$

Calcolare la derivata

557 $y = x^2 \sin x \cos x$ $\qquad [y' = x(\sin 2x + x\cos 2x)]$

$$y = x^2 \cdot (\sin x \cos x)$$

$$y' = 2x \cdot (\sin x \cos x) + x^2 (\sin x \cdot \cos x)' =$$

$$= 2x \sin x \cos x + x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) =$$

$$= x \sin 2x + x^2 \cos 2x = x(\sin 2x + x \cos 2x)$$

<u>IN GENERALE</u>

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = [(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x) \cdot g(x))' \cdot h(x) +$$

$$+ (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) = [f'(x) g(x) + f(x) g'(x)] \cdot h(x) +$$

$$+ (f(x) \cdot g(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

TEOREMA DEL LIMITE DELLA DERIVATA

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ tranne al più in $x_0 \in]a; b[$. Se esistono i limiti $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$, allora:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \text{ e } f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x).$$

In particolare, se $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0) = l$.

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

25 $y = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ [$x = 0$ punto angoloso] ← È CONTINUA IN $\mathbb{R}$ (anche in $x=0$)

Per $x \neq 0$ non ci sono problemi di derivabilità

$$y' = \begin{cases} -2x - 2 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

← BISOGNA CONTROLLARE DIRETTAMENTE COSA SUCCEDE IN $x = 0$

→ col limite del rapporto incrementale

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}(-h-2)}{\cancel{h}} = -2$$

$x = 0$ è un punto angoloso

OSSERVAZIONE

Avrei potuto calcolare $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ applicando il teorema del limite della derivata

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{se } x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty = f'_+(0)$$

me lo dice il TEOREMA DEL LIMITE DELLA DERIVATA

$$\lim_{x \to 0^-} (-2x-2) = -2 = f'_-(0)$$

DETERMINARE a, b IN MODO CHE f SIA CONTINUA E DERIVABILE IN $\mathbb{R}$

46 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2-1}{x+b} & \text{se } x \le 1 \\ \ln x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$[a = 0, b = -2]$

"lontano" da $x = 1$ c'è continuità e derivabilità

CONTINUITÀ

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2-1}{x+b} = \lim_{x \to 1^+} (\ln x + 1)$$

$$\frac{a-1}{1+b} = 1$$

DERIVABILITÀ

$$f(x) = \frac{ax^2-1}{x+b} \qquad f'(x) = \frac{2ax(x+b) - (ax^2-1)\cdot 1}{(x+b)^2} = \frac{2ax^2 + 2abx - ax^2 + 1}{(x+b)^2}$$

$$= \frac{ax^2 + 2abx + 1}{(x+b)^2}$$

$$f(x) = \ln x + 1 \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+2abx+1}{(x+b)^2} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2+2abx+1}{(x+b)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x}$$

TEOREMA DEL LIMITE DELLA DERIVATA

$$\frac{a+2ab+1}{(1+b)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{1+b} = 1 \\[2ex] \dfrac{a+2ab+1}{(1+b)^2} = 1 \end{cases} \qquad b \neq -1$$

$$a-1 = 1+b \implies a = 2+b$$

$$a + 2ab + 1 = (1+b)^2$$

$$2+b + 2(2+b)b + \cancel{1} = \cancel{1} + b^2 + 2b$$

$$2 + b + 4b + 2b^2 - b^2 - 2b = 0$$

$$b^2 + 3b + 2 = 0$$

$$(b+2)(b+1) = 0$$

$b = -2 \implies a = 2 + b = 2 - 2 = 0$

$b = -1$ N.ACC.

$$\boxed{\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}}$$

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

23 $y = \sqrt[3]{x^2} + 2x$ [$x = 0$ cuspide]

DEFINITA E CONTINUA IN $\mathbb{R}$ $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x$

$$y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + 2 = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2 \qquad x \neq 0$$

Devo controllare cosa succede in $x = 0$

$f'_+(0) = ?$ $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2 \right) = \frac{2}{0^+} + 2 = +\infty \Rightarrow f'_+(0) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 2 \right) = \frac{2}{0^-} + 2 = -\infty \Rightarrow f'_-(0) = -\infty$

$x = 0$ CUSPIDE

STUDIARE CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ

31 $$y=\begin{cases} e^{|x|} & \text{se } x<1 \\ \dfrac{1-x}{x-2} & \text{se } x\ge 1 \wedge \cancel{x\neq 2} \\ 0 & \text{se } x=2 \end{cases}$$

[$x=0$ punto angoloso,
$x=1$ punto di discontinuità di I specie,
$x=2$ ~~punto singolare~~ DISCONTINUITÀ di II specie]

CONTINUITÀ

$$\lim_{x\to 1^-} e^{|x|} = e \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

$x=1$ DISC. DI I SPECIE

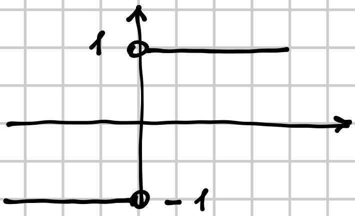
$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0^\pm} = \mp\infty$$

$x=2$ DISC. DI II SPECIE

DERIVABILITÀ

- PUNTI DI RACCORDO → non c'è continuità quindi nemmeno derivabilità
- PUNTI IN CUI IL MODULO SI ANNULLA

$$y=e^{|x|} \qquad y' = e^{|x|}\cdot(|x|)' \quad x\neq 0$$



$y=\text{sign}(x)=|x|'$

$$= e^{|x|}\cdot \text{sign}(x) =$$

$$=\begin{cases} e^{|x|} & \text{se } x>0 \\ -e^{|x|} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{|x|} = 1 = f'_+(0) \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(-e^{|x|}\right) = -1 = f'_-(0)$$

$x=0$ è un PUNTO ANGOLOSO

Per completare

$$y=\frac{1-x}{x-2} \qquad y' = \frac{-1(x-2)-(1-x)}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{-x}+2-1+\cancel{x}}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

La derivata della funzione di partenza è

$$f'(x) = \begin{cases} e^{|x|} \cdot \text{sign}(x) & \text{se} \quad x < 1 \wedge x \neq 0 \\ \dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{se} \quad x > 1 \wedge x \neq 2 \end{cases}$$

$x = 0$ PUNTO ANGOLOSO (MA C'È CONTINUITÀ)

$x = 1$ DISC. DI I SPECIE

$x = 2$ DISC. DI II SPECIE