TEOREMI DEL VALOR MEDIO

IPOTESI SULLE FUNZIONI IN GIOCO

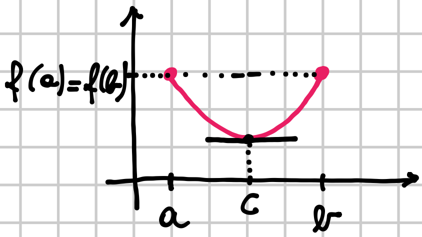
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ f CONTINUA IN $[a,b]$

DERIVABILE IN (a,b)

TEOREMA DI ROLLE

Data f come prima, se in più $f(a) = f(b)$

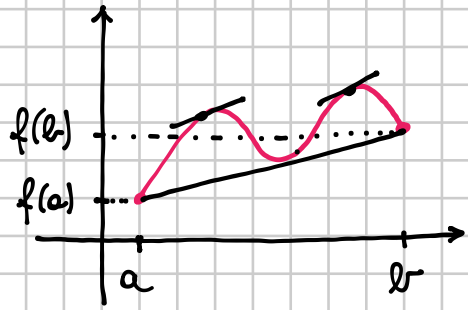
$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$



TEOREMA DI LAGRANGE

Data f come prima

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ t.c. } f'(c) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\substack{\text{è il coeff.} \\ \text{angolare della} \\ \text{retta per } (a, f(a)) \text{ e } (b, f(b))}}$$



(Esiste almeno un punto interno la cui tangente è parallela alla retta che congiunge gli estremi)

TEOREMA DI CAUCHY

f, g come prima, in più $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ t.c. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(si mette la condizione $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$ in modo che per il TH. DI ROLLE sia $g(b) \neq g(a)$)

DIMOSTRAZIONI

Vale la seguente catena:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, Rightarrow] & & R \arrow[dl, Rightarrow] \\ & C \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

1) $L \Rightarrow R$ OVVIO: se vale L e in più ho $f(a)=f(b)$, allora

$$\exists c \in (a,b) : \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

2) $R \Rightarrow C$ Applico R alla funzione

$$F(x) = \alpha f(x) - \beta g(x) \qquad \alpha = g(b) - g(a)$$
$$\beta = f(b) - f(a)$$

SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE (F DERIV. CONTINUA ...)

$$F(a) = [g(b)-g(a)]f(a) - [f(b)-f(a)]g(a) =$$
$$= g(b)f(a) - \cancel{g(a)f(a)} - g(a)f(b) + \cancel{f(a)g(a)}$$
$$F(b) = [g(b)-g(a)]f(b) - [f(b)-f(a)]g(b) =$$
$$= \cancel{g(b)f(b)} - g(a)f(b) - \cancel{f(b)g(b)} + f(a)g(b)$$

SONO =

Applicando R a F trovo $c \in (a,b)$ tale che $F'(c)=0$

$$F'(x) = \alpha f'(x) - \beta g'(x) \Rightarrow F'(c) = 0 = \alpha f'(c) - \beta g'(c)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

3) $C \Rightarrow L$ Basta applicare C con $g(x) = x$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI ROLLE

LEMMA

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b).

$c\in(a,b)$ è PUNTO DI MASSIMO O MINIMO

$\Rightarrow f'(c)=0$

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA

Sia $c\in(a,b)$ ad es. punto di max

$f(c+h)\le f(c) \quad \forall h$ tale che $c+h\in(a,b)$

$$\Downarrow$$

$f(c+h)-f(c)\le 0 \quad \Rightarrow \quad \forall h>0 \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$

$\forall h<0 \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$

$$f'_+(c)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$$

$$f'_-(c)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$$

$$0\le f'_-(c)=f'(c)=f'_+(c)\le 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(c)=0$$

Analogamente per il punto di minimo. FINE DIMOSTRAZIONE LEMMA

Veniamo alla dimostrazione del teorema:

$$f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continua} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TH. WEIERSTRASS}}}{\Longrightarrow} \exists\, c_1, c_2 \text{ di massimo e minimo } \left(c_1, c_2 \in [a,b]\right)$$

CASI

1) Uno almeno dei due punti c_1, c_2 è interno (ad es. $c_1 \in (a,b)$)
applico il LEMMA e dunque $f'(c_1) = 0$

2) Nessuno dei due punti c_1, c_2 è interno, quindi sono entrambi estremi dell'intervallo $[a,b]$, cioè
1) $a = c_1$ e $b = c_2$ oppure
2) $a = c_2$ e $b = c_1$

Ad es. sia a il punto di min e b il punto di max

$$\forall x \in (a,b) \qquad f(a) \le f(x) \le f(b) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{=} f(a)$$

$$\Downarrow$$

f è COSTANTE e la sua derivata è sempre 0 QED

I tre teoremi del valor medio sono tra loro equivalenti. Sono teoremi di "produzione" di altri importanti risultati.

<u>COMPITO</u>

Far vedere mediante controesempi (anche solo grafici) che se facciamo cadere uno alla volta le ipotesi del <u>TH. DI ROLLE</u>, la tesi non è più vera.

IPOTESI DA FAR CADERE:
- f CONTINUA IN a E b
- f DERIVABILE IN (a,b)
- $f(a) = f(b)$

(far vedere che può essere che $\nexists\, c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$)