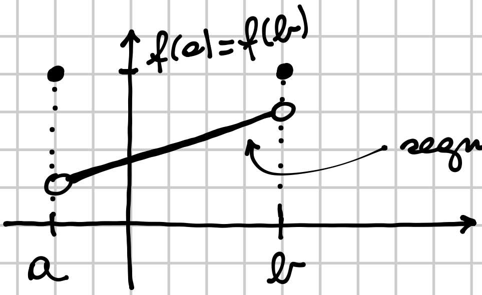
ESERCIZIO

Far cadere a una a una le ipotesi del TH. ROLLE e far vedere che la tesi può essere falsa.

IP.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, derivabile in (a,b), $f(a)=f(b)$

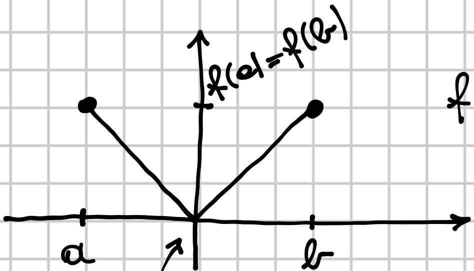
TS.: $\exists c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=0$

1) f NON CONTINUA IN a E b, ma derivabile in (a,b) e $f(a)=f(b)$



segmento rettilineo, la derivata all'interno non è mai 0

2) f continua in $[a,b]$, f NON DERIVABILE in (a,b) e $f(a)=f(b)$



$f(x)=|x|$

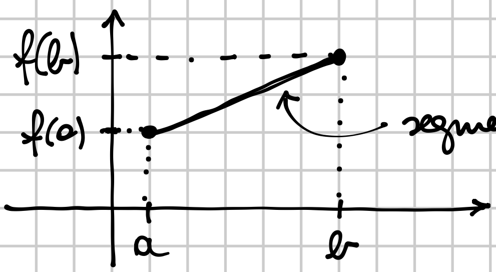
$\forall x\in(a,0)\quad f'(x)=-1$

$\forall x\in(0,b)\quad f'(x)=1$

in $x=0$ non è derivabile!

Non esiste nessun punto interno in cui la derivata è nulla

3) f continua in $[a,b]$, f derivabile in (a,b) e $f(a)\neq f(b)$



segmento rettilineo

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

32 $y = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

[$x = 0$ flesso a tangente verticale]

La funzione è definita in $\mathbb{R}$

Vediamo se è continua:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x^2 = \lim_{x \to 0^+} 2x \cdot \ln x = \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{t} \cdot \ln\left(\frac{1}{t}\right) =$$

F.I. $0 \cdot (-\infty)$

$x = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{x}$ $\quad x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{t} \cdot \ln(t^{-1}) = \lim_{t \to +\infty} -2 \frac{\ln t}{t} = 0$$

per la gerarchia degli infiniti $e^x > x^n > \ln x$ per $x \to +\infty$

Analogamente per $x \to 0^-$

quindi la funzione è continua in 0 e dunque in $\mathbb{R}$

Controlliamo la derivabilità:

$\forall x \neq 0$ la funzione è derivabile $\quad f(x) = x \ln x^2 \quad x \neq 0$

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x^2 + x \cdot (\ln x^2)' =$$

$$= \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x =$$

$$= \ln x^2 + 2$$

Usiamo il TH. DEL LIMITE DELLA DERIVATA

$$\lim_{x \to 0} (\ln x^2 + 2) = \ln(0^+) = -\infty$$

se esiste il limite, esso è proprio $f'(0)$

La derivata esiste ed è $-\infty$

$f'(0) = -\infty$

$x = 0$ è un FLESSO A TANGENTE VERTICALE

f <u>NON È</u> derivabile in 0 !!!

TROVARE a, b IN MODO CHE f SIA DERIVABILE

43 $f(x) = \begin{cases} -2ax^2 + bx & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$\left[a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\right]$

CONTINUITÀ IN $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{x \to 1^-} (-2ax^2 + bx)$$

$$\frac{1}{2} = -2a + b$$

DERIVABILITÀ IN $x = 1$

$$\frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$$

$$\left[(x^2+1)^{-1}\right]' = -(x^2+1)^{-2} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \begin{cases} -4ax + b & \text{se } x < 1 \\ -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

DERIVATA "LONTANO" DA $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} (-4ax + b) = -4a + b = f'_-(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2} = f'_+(1) \implies -4a + b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = -2a + b \\ -4a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} + 2a \\ -4a + \frac{1}{2} + 2a = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ -2a = -1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}}$$