CALCOLARE LA DERIVATA

**602** $y = \ln\sqrt{\arccos x}$ $\left[y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}} \cdot \left(\sqrt{\arccos x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arccos x}} \cdot (\arccos x)' =$$

$$= \frac{1}{2\arccos x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{2\arccos x\sqrt{1-x^2}}$$

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

**34** $y = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & \text{se } x \leq 2 \\ \sqrt{9-x^2} & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

[~~$x = 1$ punto singolare di II specie,~~
$x = 2$ punto di disc. di I specie,
$x = 3$ punto a tangente verticale]

Se la funzione fosse definita in $x = 1$ avrebbe qui un punto di discontinuità di II specie $\left(\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty\right)$

$D = (-\infty, 1) \cup (1, 3]$

$\hookrightarrow$ bisogna controllare la continuità nel punto di raccordo $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2 \qquad \lim_{x\to 2^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{5}$$

$x = 2$ punto di discontinuità di I specie (non derivabilità)

Bisogna controllare, per la derivabilità, dove si annulla la radice cioè in $x = 3$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 2,\ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2}}(-\cancel{2}x) = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

$\boxed{f'_-(2) = -1 \quad \text{DERIVATA SINISTRA}}$

MA NON È LA DERIVATA!

vediamo cosa succede in $x = 3$

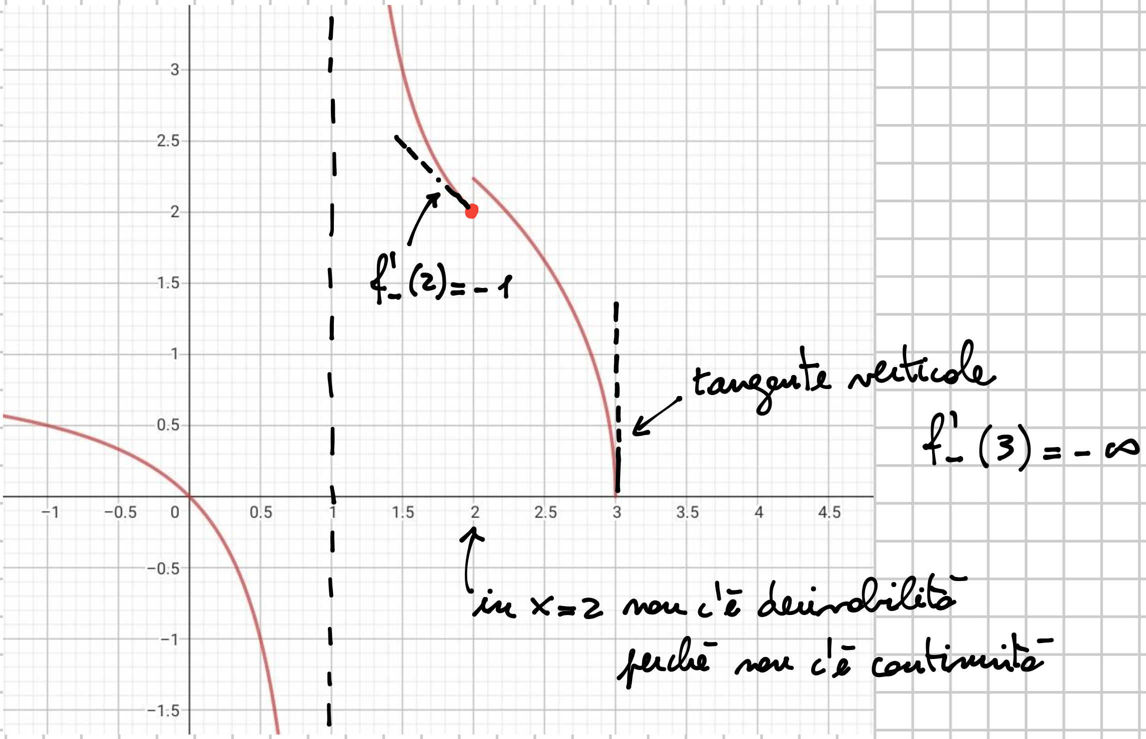
Uso il TH. LIMITE DELLA DERIVATA

$$\lim_{x\to 3^-}\left(-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right) = -\frac{3}{0^+} = -\infty$$

In $x=3$ la funzione non è derivabile, ma $f'_-(3) = -\infty$

In definitiva la FUNZIONE DERIVATA è

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x<2 \text{ e } x\neq 1 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}} & \text{se } 2<x<3 \end{cases}$$



Vedere se è applicabile il <u>TH. DI LAGRANGE</u> e trovare il punto c

**136** $f(x) = 2e^x + x,$ $[0; 1].$ $[c = \ln(e-1)]$

è continua in $[0,1]$
è derivabile in $(0,1)$ $\Rightarrow$ è applicabile TH. LAGRANGE

$f(0) = 2 \cdot e^0 + 0 = 2$ $f'(x) = 2e^x + 1$

$f(1) = 2e^1 + 1 = 2e + 1$

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$2e^x + \cancel{1} = 2e + \cancel{1} - 2$ risolvo l'equazione, e la sua soluzione sarà il c che cerco

$\cancel{2}e^x = \cancel{2}(e-1)$

$e^x = e - 1 \Rightarrow x = \ln(e-1)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c = \ln(e-1)}$$

Verificare che è applicabile il <u>TH. DI LAGRANGE</u> e trovare c

**130** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $\left[-7; \dfrac{1}{2}\right]$. $[c=-1]$

è continua e derivabile in $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$

$f(-7) = \frac{15}{8}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(-7)}{\frac{1}{2} - (-7)} = f'(x)$$

$$\frac{0 - \frac{15}{8}}{\frac{1}{2} + 7} = \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2}$$

in $\left[-7, \frac{1}{2}\right]$

$-7 \leq x \leq \frac{1}{2}$

C.E.

$$\frac{\cancel{2x} - 2 - \cancel{2x} + 1}{(x-1)^2} = \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{15}{2}}$$

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$(x-1)^2 = 4$

$x - 1 = \pm 2$ — $x = -1$; $x = 3$ N. ACC.

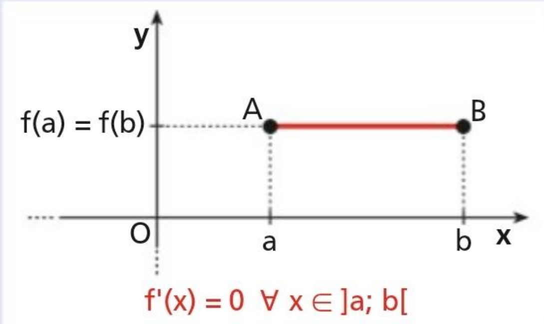
$$\boxed{c = -1}$$

Se l'intervallo fosse stato $[-7, 5]$, sarebbe stato ancora applicabile il TH. DI LAGRANGE? <u>NO</u> perché non è definita in $x=1$, quindi non è della forma $f: [a, b] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

# CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

**TEOREMA** (DELLA DERIVATA NULLA)
Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a;b]$, derivabile in $]a;b[$ e tale che $f'(x)$ è nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a;b]$.




## DIMOSTRAZIONE

Applico il TH. LAGRANGE all'intervallo $[a, x]$, con $x \in (a, b)$

$\Rightarrow \exists c \in (a, x)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ma per ipotesi $f'(c) = 0$

quindi $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$

Siccome $x$ è un qualsiasi punto di $(a, b)$, la sua immagine è sistematicamente $f(a)$ e dunque $f$ è costante. (Per continuità anche $f(b)$ è uguale a $f(a)$)

**TEOREMA** (COROLLARIO DEL TH. DERIVATA NULLA)
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a;b]$, derivabili in $]a;b[$ e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in ]a;b[$, allora esse differiscono per una costante.

## DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow [f(x) - g(x)]' = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COSTANTE}}}{K} \Rightarrow f(x) = g(x) + K$$

OSSERVAZIONE: Questi due teoremi valgono anche per intervalli illimitati

**176** Dimostra che la funzione $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ è costante in $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$ e trova il valore di $y$.

$\left[ y = -\frac{\pi}{2} \text{ per } x < 0,\ y = \frac{\pi}{2} \text{ per } x > 0 \right]$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \qquad D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$x \neq 0$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$f$ È COSTANTE IN OGNUNO DEI 2 INTERVALLI $(-\infty, 0)$ E $(0, +\infty)$ (CON COSTANTI DIVERSE)

$$f(x) = \begin{cases} k_1 & \text{se } x < 0 \\ k_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per calcolare $k_1$ e $k_2$ prendo le immagini di $1$ e $-1$

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

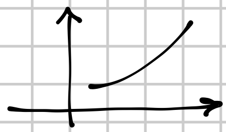
# TEOREMA IMPORTANTE

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f$ derivabile in $I$

$I$ ← INTERVALLO

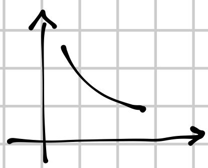
$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE CRESCENTE in $I$

$(\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$



$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE in $I$

$(\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2))$



## DIMOSTRAZIONE

Supponiamo $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$. Devo controllare che $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

Dati $x_1$ e $x_2$ con $x_1 < x_2$, applico TH. DI LAGRANGE all'intervallo $[x_1, x_2]$ trovo $c \in (x_1, x_2)$ tale che

PER IPOTESI

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} = f'(c) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

QED