1 Il teorema di De L'Hôpital

Teorema di De L'Hôpital

Siano I un intervallo e $c \in [\inf I, \sup I]$. Supponiamo:

(1) $f, g \colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ derivabili

(2) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ oppure $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$

(3) $\forall x \in I \setminus \{c\} \quad g'(x) \neq 0$

(4) esiste $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

415 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x+9}-4}{x^3-2x} = \dfrac{0}{0}$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+9}}}{3x^2-2} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{-2} = \frac{\frac{-3+1}{6}}{-2} = \frac{1}{6}$$

417 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\ln x}{e^x+x} = \dfrac{+\infty + \infty}{+\infty + \infty} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ F.I. [0]

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{e^x+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\frac{1}{x} \to 0$

$e^x \to +\infty$

458 $\lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \sin\frac{1}{x} = +\infty \cdot 0$ $[+\infty]$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{e^{-x}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-e^{-x}} = \frac{1\cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$$

POTREI APPLICARE ANCORA DE L'HOSPITAL, MA PEGGIOREREI LA SITUAZIONE!

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{-2}\cdot\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\cos\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{+\infty}}{\underbrace{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\sin^2\frac{1}{x}}}_{1}\cdot\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{1}} = +\infty$$

Si poteva anche risolvere così:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+} e^{\frac{1}{t}}\cdot\sin t = \lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{(\sin t)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$t = \frac{1}{x}$ $\Downarrow$ $x = \frac{1}{t}$ $\quad$ $t\to0^+$ per $x\to+\infty$

$$\overset{H}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-(\sin t)^{-2}\cdot\cos t} =$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{\frac{t^2}{(\sin t)^2}\cdot\cos t} = \lim_{t\to0^+}\overbrace{\frac{(\sin t)^2}{t^2}}^{1}\cdot\frac{\overbrace{e^{\frac{1}{t}}}^{+\infty}}{\underbrace{\cos t}_{1}} = +\infty$$

Per dimostrare il TH. LIMITE DELLA DERIVATA

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} f'(x_0+h) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$$

$x_0 + h = x \qquad x \to x_0$ per $h \to 0$

$h = x - x_0$

Trovare intervalli di cresc. e decrescenza

241 $y = xe^{-\frac{1}{x+2}}$ $[x < -4 \vee x > -1]$

DOMINIO: $x \neq -2$ $\quad D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{x+2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x+2}} \cdot \left(-\frac{1}{x+2}\right)' = \quad \left[-(x+2)^{-1}\right]'$$

$$= e^{-\frac{1}{x+2}} + x e^{-\frac{1}{x+2}} \cdot (x+2)^{-2} =$$

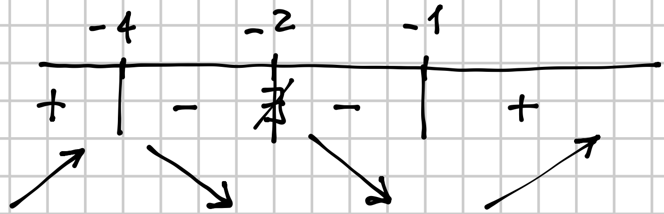
$$= \underbrace{e^{-\frac{1}{x+2}}}_{>0\ \forall x} \cdot \left[1 + \frac{x}{(x+2)^2}\right]$$

$f'(x) > 0 \qquad 1 + \frac{x}{(x+2)^2} > 0 \qquad \frac{(x+2)^2 + x}{(x+2)^2} > 0$

$\frac{x^2 + 4x + 4 + x}{(x+2)^2} > 0 \qquad \frac{x^2 + 5x + 4}{\cancel{(x+2)^2}} > 0$

$x^2 + 5x + 4 > 0 \qquad (x+4)(x+1) > 0 \qquad x < -4 \vee x > -1$

$x \neq -2$



-4 P.TO DI MAX RELATIVO $\qquad -1$ P.TO DI MIN RELATIVO

f è strett. crescente in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$ (ma NON nella loro unione)

735 Determina i parametri a, b, c, d in modo che il grafico della funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per l'origine degli assi cartesiani, in cui la tangente sia parallela alla retta $y = x + 5$ e passi per il punto $A(2; 0)$, nel quale la tangente sia perpendicolare alla retta $x + 2y = 1$.

$\left[a = \frac{3}{4}, b = -2, c = 1, d = 0\right]$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

passaggio per $O(0,0) \Rightarrow d = 0$

In O la tangente è $\parallel$ $y = x + 5 \Rightarrow f'(0) = 1$

$f'(0) = c$

$\Rightarrow c = 1$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + x$

passaggio per $A(2,0) \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2 = 0$

retta $x + 2y = 1 \Rightarrow 2y = -x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

In A la tangente è $\perp$ $y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{coeff. angolare}} x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(2) = 2$

ANTIRECIPROCO DI $-\frac{1}{2}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$12a + 4b + 1 = 2$

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2 = 0 \\ 12a + 4b + 1 = 2 \end{cases}$$

$4a \quad // \quad -1 = 2$

$4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$\cancel{8}^{2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} + 4b + 2 = 0$

$6 + 4b + 2 = 0 \qquad b = -2$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 2x^2 + x}$$

Trovare la tangente condotta dal punto

711 $y = x^3 - 3$, $(-1; -8)$. $[y = 3x - 5]$

NON APPARTIENE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE

INCOGNITA x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$f(x) = x^3 - 3$

$f'(x) = 3x^2$

$\Downarrow$

$y - (x_0^3 - 3) = 3x_0^2(x - x_0)$ GENERICA TANGENTE

la faccio passare per $(-1, -8)$

$$-8 - x_0^3 + 3 = 3x_0^2(-1 - x_0)$$

$$-5 - x_0^3 = -3x_0^2 - 3x_0^3$$

$2x_0^3 + 3x_0^2 - 5 = 0$ APPLICO RUFFINI $x_0 = 1$

	2	3	0	-5
1		2	5	5
	2	5	5	//

$$\underbrace{(2x_0^2 + 5x_0 + 5)}_{\Delta < 0}(x_0 - 1) = 0$$

$x_0 = 1 \Rightarrow y - (x_0^3 - 3) = 3x_0^2(x - x_0)$

$y + 2 = 3(x - 1)$ $y = 3x - 3 - 2$

$$\boxed{y = 3x - 5}$$