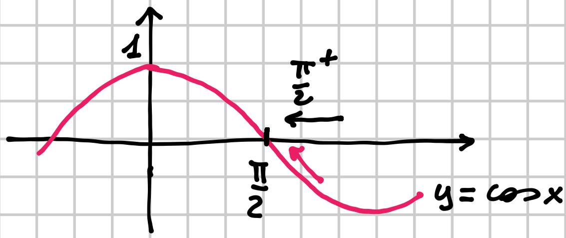
443 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{0}{0}$

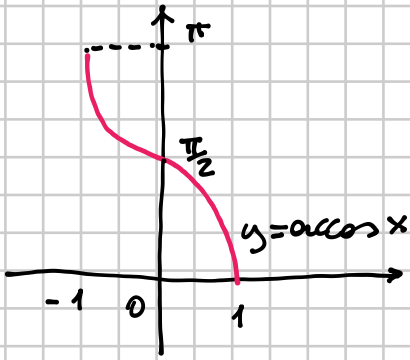


$$\overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

446 $\lim_{x \to e} \frac{\ln(x+1-e)}{\ln x - \cos(x-e)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to e} \frac{\frac{1}{x+1-e}}{\frac{1}{x} + \sin(x-e)} = \frac{\frac{1}{\cancel{e}+1-\cancel{e}}}{\frac{1}{e} + \underbrace{\sin(e-e)}_{0}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

452 $$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos(x^2) - x^2}{x^6} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0}{0} = \frac{0}{0}$$



$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x - 2x}{6x^5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x - 2x\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}}}{6x^5} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2x\sqrt{1-x^4}}{6x^5\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\overset{1}{\cancel{2x}}\left(1 - \sqrt{1-x^4}\right)}{\underset{3}{\cancel{6}}\,x^{\cancel{5}\,4}\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^4}}{3x^4\sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{1+\sqrt{1-x^4}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1-x^4)}{3x^4\sqrt{1-x^4}\left(1+\sqrt{1-x^4}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + x^4}{3x^4\sqrt{1-x^4}\left(1+\sqrt{1-x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^4}}{3\cancel{x^4}\underbrace{\sqrt{1-x^4}}_{\downarrow\, 1}\underbrace{\left(1+\sqrt{1-x^4}\right)}_{\downarrow\, 2}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

451 $\lim_{x \to 0} \frac{2\ln(1+e^x) - x - \ln 4}{x^2} = \frac{\overbrace{2\ln 2}^{\ln 2^2} - \ln 4}{0} = \frac{0}{0}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2e^x}{1+e^x} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2e^x - 1 - e^x}{1+e^x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x(1+e^x)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2(1+\underbrace{e^x}_{1}) + 2x \cdot e^x} = \frac{1}{2 \cdot 2 + 0} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

derivata del prodotto

Trovare la retta tangente nel punto di ascissa data

661 $y = 2\ln^2 x - x^2$, 1. $[y = -2x + 1]$

$2[\ln x]^2$

$y = f(1) = 2\ln^2 1 - 1^2 = -1$ $\qquad P(1, -1)$ punto del grafico

$f'(x) = 2 \cdot 2 \ln x \cdot (\ln x)' - 2x = \frac{4\ln x}{x} - 2x$

$f'(1) = \frac{4\overbrace{\ln 1}^{0}}{1} - 2 \cdot 1 = -2$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$y + 1 = -2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 1}$$

Trovare la tangente

662 $y = x^{x-2}$, 1. $[y = -x + 2]$

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$f(x) = x^{x-2} = e^{(x-2)\cdot\ln x} \qquad f(1) = e^{-1\cdot\ln 1} = e^{0} = 1$$

$$f'(x) = e^{(x-2)\ln x}\cdot\left[(x-2)\cdot\ln x\right]' = x^{x-2}\cdot\left[\ln x + \frac{x-2}{x}\right]$$

$$f'(1) = 1^{-1}\cdot\left[\overbrace{\ln 1}^{0} + \frac{1-2}{1}\right] = -1$$

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

$$y - 1 = -1\cdot(x-1)$$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

87 Date le funzioni $f(x) = x\ln\frac{1}{x}$ e $g(x) = [f(x)]^2 + 2f(x)$:

a. giustifica che $f(x)$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}^+$ e trova la sua derivata prima;

b. giustifica che $g(x)$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}^+$ e che risulta $g'(x) = 2f'(x) \cdot [f(x) + 1]$;

c. dimostra che le tangenti ai grafici di $f(x)$ e $g(x)$ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{e}$ sono parallele e che esiste solo un altro punto in cui i due grafici hanno la tangente parallela.

a) $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$ $\qquad D = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$

f è derivabile in $\mathbb{R}^+$ perché prodotto (e composizione) di funzioni derivabili in $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \ln \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\frac{1}{x} - 1$$

oppure

$$f(x) = x \ln x^{-1} = -x \ln x \Rightarrow f'(x) = -\ln x + (-x)\cdot\frac{1}{x} = -\ln x - 1$$
$$= \ln x^{-1} - 1$$
$$= \ln \frac{1}{x} - 1$$

b) $g(x) = \overbrace{[f(x)]^2}^{f^2(x)} + 2f(x)$

è derivabile in $\mathbb{R}^+$ perché composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}^+$

$$g'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) + 2f'(x) = 2f'(x)\left[f(x) + 1\right]$$

$x = \frac{1}{e}$ $\qquad f'\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{\frac{1}{e}} - 1 = \ln e - 1 = 1 - 1 = 0$

$$g'\left(\frac{1}{e}\right) = 2 \cdot \underbrace{f'\left(\frac{1}{e}\right)}_{0 \text{ dal calcolo prec.}}\left[f\left(\frac{1}{e}\right) + 1\right] = 0$$

UGUALI $\Rightarrow$ uguale derivata significa uguale coeff. angolare delle tangenti, dunque le tangenti sono //

Per dimostrare che esiste un (solo) altro punto in cui le tangenti sono parallele devo uguagliare le derivate

$$f'(x) = g'(x)$$

$$f'(x) = 2f'(x)\left[f(x)+1\right]$$ ← equazione da risolvere

$$2f'(x)\left[f(x)+1\right] - f'(x) = 0$$

$$f'(x)\left[2f(x)+2-1\right] = 0$$

$$f'(x)\left[2f(x)+1\right] = 0$$

1^a sol. $f'(x) = 0$

2^a sol. $2f(x)+1=0$

1^a) $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln\frac{1}{x} - 1 = 0$

$\ln\frac{1}{x} = 1 \qquad \frac{1}{x} = e \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ (la soluzione di prima, non ce ne sono altre)

2^a) $2f(x)+1=0 \Rightarrow 2\left(x\ln\frac{1}{x}\right)+1=0$

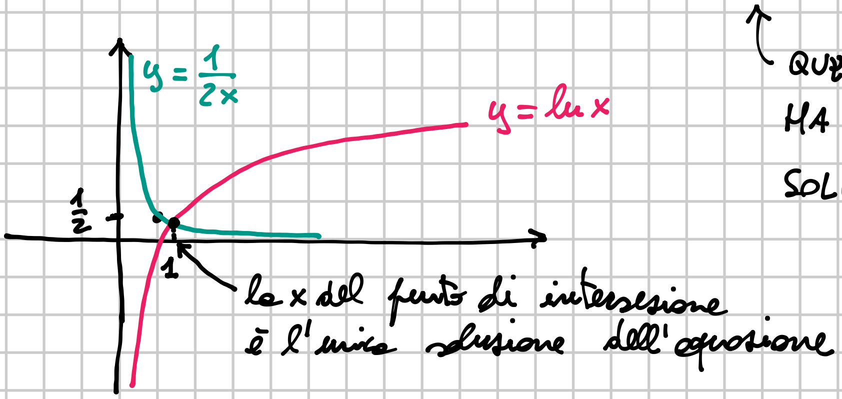
$$2x\ln x^{-1}+1=0$$

$$-2x\ln x+1=0$$

$$-2x\ln x = -1 \qquad 2x\ln x = 1$$

↑ QUESTA EQUAZIONE HA 1 E 1 SOLA SOLUZIONE

$$\ln x = \frac{1}{2x}$$



Trovare intervalli di cresc. e decresc.

243 $y = 2x - |7x^2 - 3x|$ $\left[x < 0 \vee \frac{1}{14} < x < \frac{3}{7}\right]$

$D = \mathbb{R}$

$7x^2 - 3x > 0$

$x(7x-3) > 0 \qquad x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{3}{7}$

$x = 0 \quad x = \frac{3}{7}$

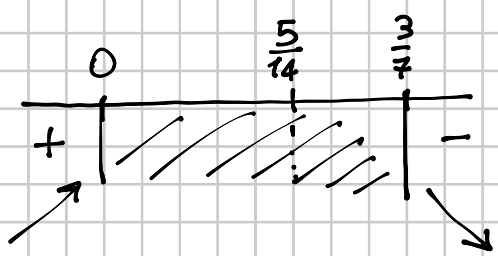
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7x^2 + 3x & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{7} \\ 2x + 7x^2 - 3x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 7x^2 & \text{se } x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{7} \\ -x + 7x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{7} \end{cases}$$

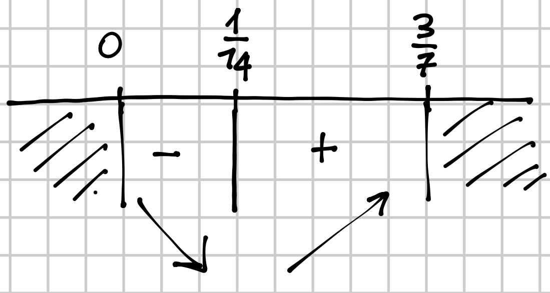
$$f'(x) = \begin{cases} 5 - 14x & \text{se } x < 0 \vee x > \frac{3}{7} \\ -1 + 14x & \text{se } 0 < x < \frac{3}{7} \end{cases}$$

in 0 e $\frac{3}{7}$ f <u>non</u> è derivabile (limiti destri e sinistri di f' diversi)

$$\begin{cases} 5 - 14x > 0 \\ x < 0 \vee x > \frac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < \frac{5}{14} \\ x < 0 \vee x > \frac{3}{7} \end{cases}$$



$$\begin{cases} -1 + 14x > 0 \\ 0 < x < \frac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > \frac{1}{14} \\ 0 < x < \frac{3}{7} \end{cases}$$



Strett. crescente in $(-\infty, 0)$ e in $\left(\frac{1}{14}, \frac{3}{7}\right)$

Strett. decrescente in $\left(0, \frac{1}{14}\right)$ e in $\left(\frac{3}{7}, +\infty\right)$