# PUNTUALIZZAZIONI

Calcolare il limite

**398** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ F.I. $[e]$

$\frac{e^x+1}{x} \to +\infty$ per $x\to+\infty$

$$\left(\frac{e^x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot \ln\left(\frac{e^x+1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{e^x+1}{x}\right)}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^x+1}{x}\right)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{e^x+1}{x}}\cdot\frac{xe^x-e^x-1}{x^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x-e^x-1}{xe^x+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(x-1-\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(x+\frac{x}{e^x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{xe^x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1+\underbrace{\frac{1}{e^x}}_{\to 0}\right)} = 1$$

Il limite di partenza è $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x+1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+1}{x}\right)}^{\to 1}} = e^1 = e$

Analogamente per calcolare la derivata di

$f(x) = x^x \quad x>0 \quad$ si scrive $\quad f(x) = e^{x\ln x}$

$$f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = e^{x\ln x}\cdot\left[\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = e^{x\ln x}(\ln x+1) =$$

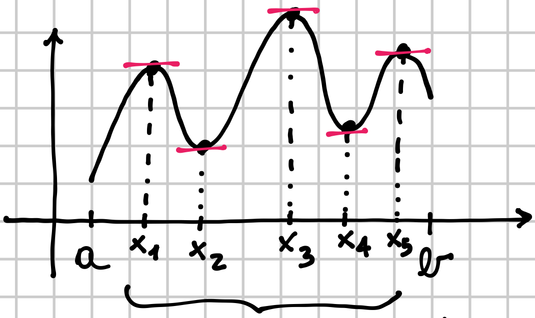
$$= x^x(\ln x + 1)$$

## Teorema di Fermat

**TEOREMA**

**Teorema di Fermat**

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, **se $f(x)$ ha un massimo o un minimo relativo** nel punto $x_0$, *interno* ad $[a; b]$, la derivata della funzione in quel punto si annulla, cioè: $f'(x_0) = 0$.

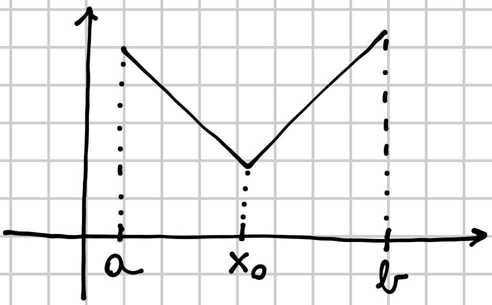



PUNTI INTERNI!!

In $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ la tangente è orizzontale, cioè la derivata è nulla

Anche a e b (estremi dell'intervallo) sono a → P.TO DI MINIMO, b → P.TO DI MINIMO ] ma la derivata in a e b non è nulla (non sono punti interni)

Se f <u>NON</u> è derivabile in $[a, b]$, il teorema non vale




$x_0$ è punto di minimo, ma in $x_0$ la funzione non è derivabile

IN PRATICA I PUNTI DI MAX E MIN RELATIVO vanno ricercati:

- nei punti dove la derivata è nulla
- nei punti di non derivabilità
- negli estremi dell'intervallo di definizione

Lo studio del segno della derivata mi permette di concludere

**48** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3$ Trovare punti di max, min

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile $\qquad f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3$

$$f'(x) = x^3 - 2x^2$$

CANDIDATI MAX E MIN (ZERI DI $f'$)

$f'(x) = 0 \qquad x^3 - 2x^2 = 0 \qquad x^2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = 2$

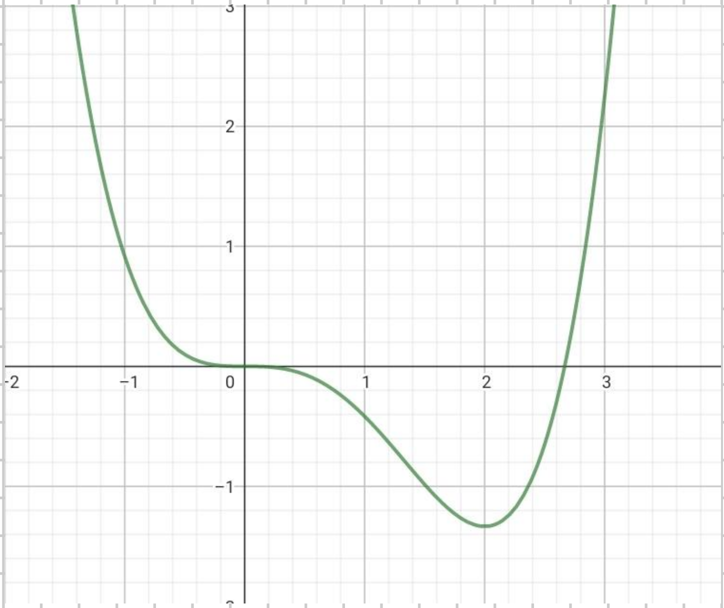
STUDIO IL SEGNO DI $f'$

$f'(x) > 0 \qquad x^3 - 2x^2 > 0 \qquad x^2(x-2) > 0 \Rightarrow x > 2$

| | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| | ↘ | P.TO DI FLESSO (TANG. ORIZZ.) | ↘ | P.TO DI MIN REL. | ↗ |

$x = 2$ P.TO DI MINIMO RELATIVO

$x = 0$ P.TO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE



**62** $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$ $\left[x = 0 \text{ max}; x = \dfrac{2}{3} \text{ min}\right]$

Calcolo il dominio $\quad 2x^2 - 3x + 1 \neq 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \qquad 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$

$2x(x-1) - (x-1) = 0$

$(x-1)(2x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

Calcolo $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x^2-3x+1) - (4x-3)(x^2-3x+1)}{(2x^2-3x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{4x^3} - \cancel{6x^2} + 2x - \cancel{6x^2} + \cancel{9x} - \cancel{3} - \cancel{4x^3} + \cancel{12x^2} - 4x + 3x^2 - \cancel{9x} + \cancel{3}}{(2x^2-3x+1)^2} =$

$= \dfrac{3x^2 - 2x}{(2x^2-3x+1)^2}$

ZERI DI $f'(x)$ $\quad f'(x) = 0 \quad \dfrac{3x^2-2x}{(2x^2-3x+1)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$

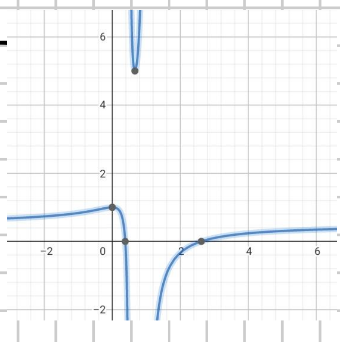
SEGNO DI $f'(x)$ $\quad f'(x) > 0 \quad \dfrac{3x^2-2x}{\underbrace{(2x^2-3x+1)^2}_{\text{sempre positivo, } \forall x \text{ con } x \neq 1 \text{ e } x \neq \frac{1}{2}}} > 0$

NUMERATORE $\quad 3x^2 - 2x > 0 \quad x(3x-2) > 0 \quad x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$

| | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NUM. | + | 0 | − | | − | 0 | + | | + |
| DEN. | + | | + | ∄ | + | | + | ∄ | + |
| | + | 0 | − | ∄ | − | 0 | + | ∄ | + |
| | ↗ | MAX | ↘ | | ↘ | MIN | ↗ | | ↗ |

$x = 0$ MAX

$x = \frac{2}{3}$ MIN



**96** $y = \dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$, in $[0; 2\pi]$. [$x = 0$ max; $x = \pi$ e $x = 2\pi$ min]

DOMINIO $1+\sin x \neq 0 \implies \sin x \neq -1 \qquad x \neq \frac{3}{2}\pi$

$$D = \left[0, \tfrac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\tfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x(1+\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x - 1}{(1+\sin x)^2}$$

ZERI DI $f'(x)$

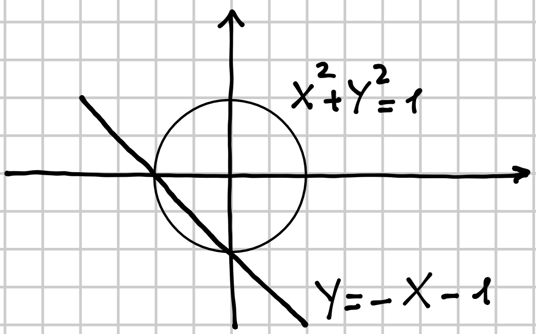
$-\sin x - \cos x - 1 = 0 \qquad \sin x + \cos x + 1 = 0$

$X = \cos x$

$Y = \sin x$

$$\begin{cases} Y + X + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = -X - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -1 \\ Y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} X = 0 \\ Y = -1 \end{cases}$$




$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x = \pi$ UNICO CANDIDATO MAX, MIN, FLESSO

$x = \frac{3}{2}\pi$ ESCLUSO DAL DOMINIO

## SEGNO DI $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \qquad \frac{-\sin x - \cos x - 1}{(1+\sin x)^2} > 0 \quad \begin{matrix} N \\ D \end{matrix}$$

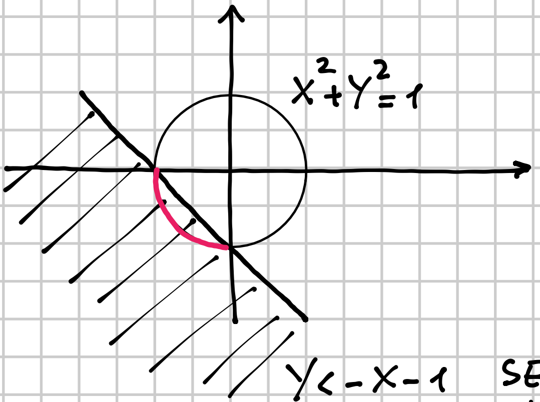
$N > 0 \qquad -\sin x - \cos x - 1 > 0$

$$\sin x + \cos x + 1 < 0 \implies \begin{cases} Y + X + 1 < 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y < -X - 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$




$Y < -X - 1$ SEMIPIANO INFERIORE

$D > 0 \qquad (1+\sin x)^2 > 0 \qquad \forall x \neq \frac{3}{2}\pi$

| | | $0$ | | $\pi$ | | $\frac{3}{2}\pi$ | | $2\pi$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $D$ | | | $+$ | | $+$ | $\cancel{\exists}$ | $+$ | | |
| $f'(x)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | $\cancel{\exists}$ | $-$ | | |

P.to DI MIN

$x = \pi$ P.to DI MIN.

$x = 0$ P.to DI MAX

$x = 2\pi$ P.to DI MIN