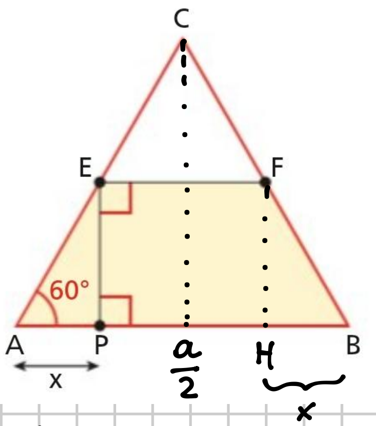
471 Dati un triangolo equilatero ABC di lato $\overline{AB} = a$ e un punto P di AB, trova la posizione di P che rende massima l'area del trapezio $PBFE$.

$\left[\overline{AP} = \frac{a}{3}\right]$



$$x \in \left[0, \frac{a}{2}\right] \qquad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{(\overline{PB} + \overline{EF})\,\overline{EP}}{2} =$$

$$= \frac{(a - x + a - 2x)\sqrt{3}\,x}{2} =$$

$$= \frac{(2a - 3x)\sqrt{3}\,x}{2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}\,x^2 + 2a\sqrt{3}\,x}{2}$$

$$\overline{PB} = a - x \qquad \overline{EF} = a - 2x$$

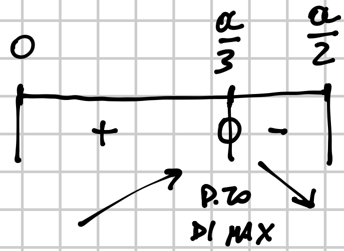
$$\overline{EP} = x \tan 60° = \sqrt{3}\,x$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{2}\left(-6\sqrt{3}\,x + 2a\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3}\,x + a\sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{3}(a - 3x)$$

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \implies a - 3x = 0 \implies x = \frac{a}{3}$$

$$\mathcal{A}'(x) > 0 \implies a - 3x > 0 \implies x < \frac{a}{3}$$



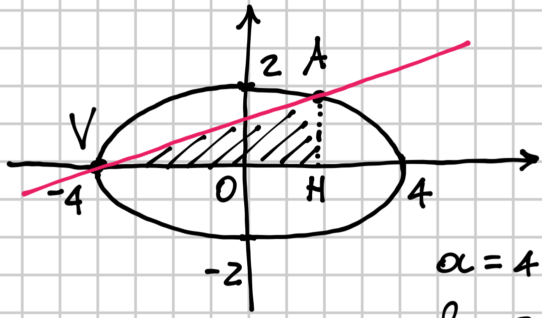
PUNTO DI MASSIMO $x = \frac{a}{3}$

Per calcolare il VALORE dell'area massima sostituisco il p.to di max $x = \frac{a}{3}$ nell'espressione della funzione

$$\mathcal{A}_{MAX} = \mathcal{A}\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{-3\sqrt{3}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 2a\sqrt{3}\cdot\frac{a}{3}}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}a^2 + 2a^2\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}a^2$$

446 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha vertice $V(-4; 0)$ e semiasse minore di lunghezza 2. Trova poi il coefficiente angolare della retta, passante per V, che intersechi l'ellisse nel punto A di ordinata $y \geq 0$ e formi il triangolo VAH di area massima, essendo H la proiezione di A sull'asse x. $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$



$a = 4$

$b = 2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$\Downarrow$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{16}$$

$$y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$

+ parte sup.

− parte inf.

$y - y_V = m(x - x_V)$ generica retta per V

$y = m(x+4)$ con $\underline{m > 0}$

$$A \begin{cases} y = m(x+4) \\ y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \end{cases}$$

$m > 0 \quad 0 \leq y \leq 2$

$-4 \leq x \leq 4$

CONDIZIONI SOTTO CUI RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$m(x+4) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$

$$m^2(x+4)^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \qquad m^2(x^2 + 16 + 8x) - 4 + \frac{x^2}{4} = 0$$

$$m^2x^2 + 16m^2 + 8m^2x - 4 + \frac{x^2}{4} = 0 \qquad 4m^2x^2 + x^2 + 32m^2x + 64m^2 - 16 = 0$$

$$(4m^2+1)x^2 + 32m^2x + 64m^2 - 16 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = 256m^4 - (4m^2+1)(64m^2-16) =$$

$$= \cancel{256m^4} - \cancel{256m^4} + \cancel{64m^2} - \cancel{64m^2} + 16 =$$

$$= 16$$

$$x = \frac{-16m^2 \pm 4}{4m^2+1} = \begin{cases} \frac{-16m^2-4}{4m^2+1} = -4 \\ \frac{-16m^2+4}{4m^2+1} \end{cases}$$

mi ridà il punto $V(-4, 0)$

$$y = m(x+4) \qquad y = m\left(\frac{-16m^2+4}{4m^2+1} + 4\right) = m\,\frac{\cancel{-16m^2} + 4 + \cancel{16m^2} + 4}{4m^2+1} =$$

$$= \frac{8m}{4m^2+1} \qquad A\left(\frac{-16m^2+4}{4m^2+1}, \frac{8m}{4m^2+1}\right)$$

$$A\left(\overbrace{\frac{-16m^2+4}{4m^2+1}}^{\overline{OH}},\ \overbrace{\frac{8m}{4m^2+1}}^{\overline{AH}}\right) \qquad m>0 \qquad \overline{VH}=\overline{OH}+\overline{VO}=$$

$$=x_A+4$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{VH}$$

$$\mathcal{A}(m)=\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{4}{\cancel{8m}}}{4m^2+1}\cdot\left(\frac{-16m^2+4}{4m^2+1}+4\right)=\frac{4m}{4m^2+1}\cdot\frac{-\cancel{16m^2}+4+\cancel{16m^2}+4}{4m^2+1}=$$

$m\geq 0$

$$=\frac{32m}{(4m^2+1)^2} \qquad \text{FUNZIONE AREA} \qquad \left(\text{OSS. } \lim_{m\to+\infty}\mathcal{A}(m)=0\right)$$

$$\mathcal{A}'(m)=32\,\frac{(4m^2+1)^2-m\cdot 2(4m^2+1)\cdot 8m}{(4m^2+1)^4}=$$

$$=32\,\frac{16m^4+1+8m^2-64m^4-16m^2}{(4m^2+1)^4}=32\,\frac{-48m^4-8m^2+1}{(4m^2+1)^4}$$

$$\mathcal{A}'(m)=0 \Rightarrow 48m^4+8m^2-1=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=16+48=64=8^2$$

$$m^2=\frac{-4\pm 8}{48}= \begin{cases} -\dfrac{12}{48} & \text{NON ACC. perché } m^2\geq 0 \\[2ex] \dfrac{4}{48}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$$

$$m^2=\frac{1}{12} \underset{m>0}{\Longrightarrow} m=\frac{1}{\sqrt{12}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

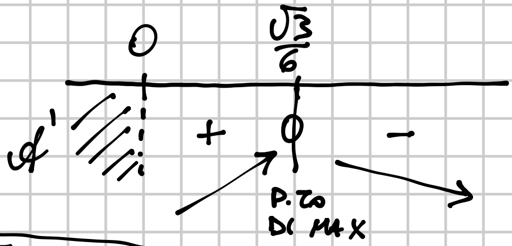
CANDIDATO MAX

Devo studiare il segno di $\mathcal{A}'(m)$

$$\mathcal{A}'(m)>0 \Rightarrow -48m^4-8m^2+1>0$$

$$48m^4+8m^2-1<0$$

$$0<m^2<\frac{1}{12} \Rightarrow 0<m<\frac{\sqrt{3}}{6}$$



$$\boxed{m=\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{P.TO DI MASSIMO}}$$

STUDIO COMPLETO DI FUNZIONE

168 $y = (x+2)^2 e^{-x}$

1) DOMINIO $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

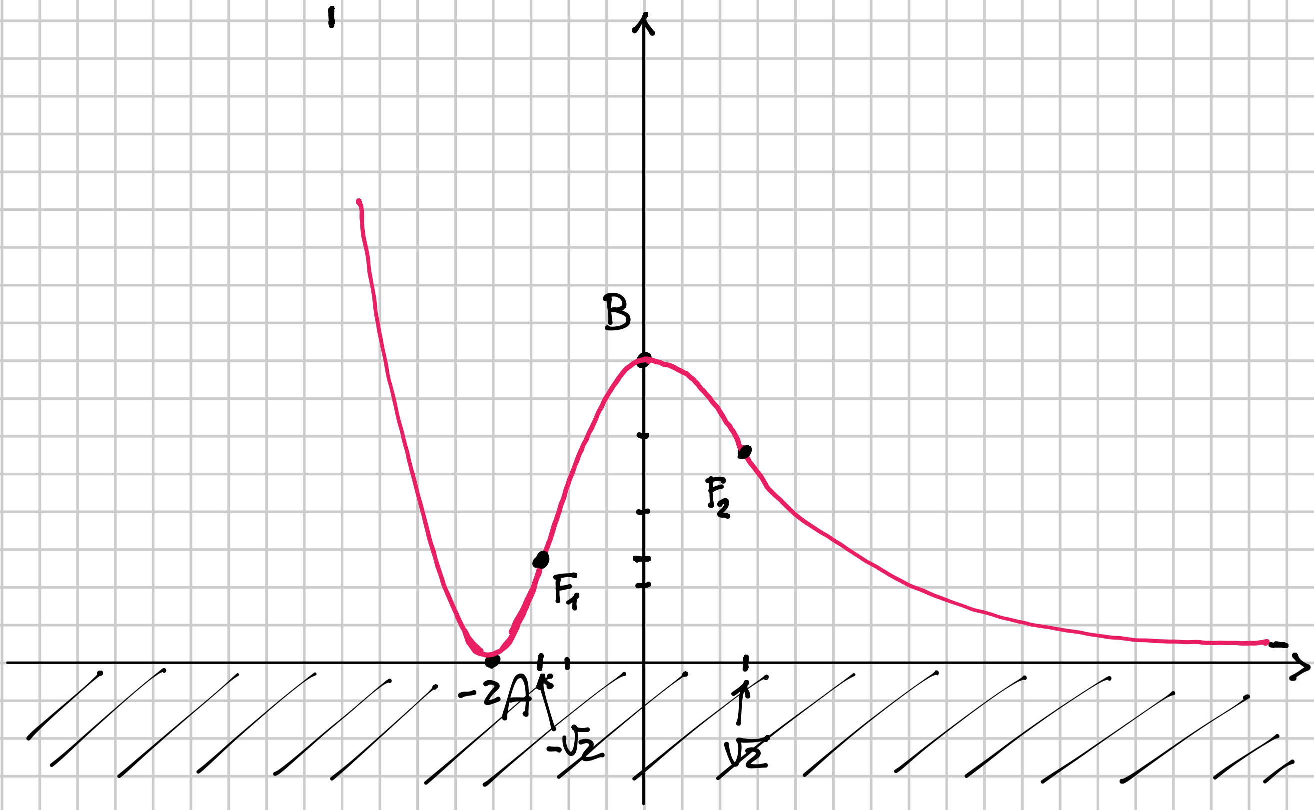
2) INTERSEZIONI CON GLI ASSI

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x+2)^2 e^{-x} \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$A(-2,0)$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (x+2)^2 e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

$B(0,4)$



3) SEGNO DI f

$(x+2)^2 e^{-x} > 0 \quad \forall x \neq -2$

4) LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \to -\infty} (x+2)^2 e^{-x} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} = 0$$

$y=0$ È ASINTOTO ORIZZ. PER $x \to +\infty$

5) RICERCA ASINTOTI OBLIQUI (per $x \to -\infty$ perché per $x \to +\infty$ ho già trovato $y=0$)

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+2)^2 e^{-x}}{x} = +\infty$$

↑ per la gerarchia degli infiniti

NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI per $x \to -\infty$

6) STUDIO DELLA DERIVATA PRIMA

$f(x) = (x+2)^2 e^{-x}$

$$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} + (x+2)^2 \cdot (-e^{-x}) =$$

$$= (x+2)e^{-x}\left(2 - (x+2)\right) =$$

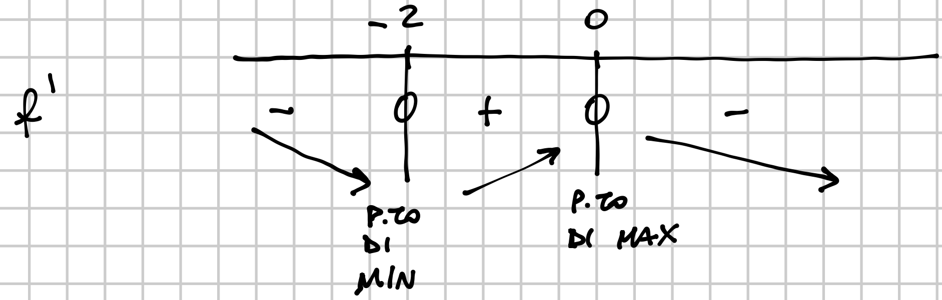
$$= -x(x+2)e^{-x}$$

ZERI DELLA DERIVATA

$f'(x) = 0 \qquad -x(x+2)\cancel{e^{-x}} = 0 \implies x = 0 \lor x = -2$

SEGNO DELLA DERIVATA

$f'(x) > 0 \qquad -x(x+2)e^{-x} > 0 \implies x(x+2)\cancel{e^{-x}} < 0 \implies -2 < x < 0$



SOSTITUISCO NELLA FUNZIONE

$x = -2 \qquad y = 0 \qquad A(-2, 0)$

$x = 0 \qquad y = (0+2)^2 e^{-0} = 4 \qquad B(4, 0)$

7) STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$$f'(x) = -x(x+2)e^{-x} = (-x^2-2x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x-2)\cdot e^{-x} + (-x^2-2x)\cdot(-e^{-x}) =$$

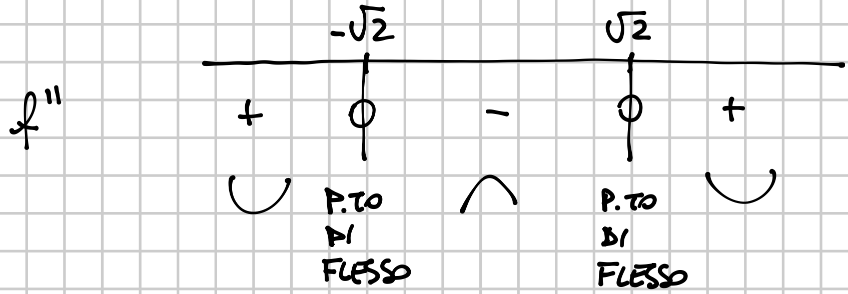
$$= e^{-x}(-\cancel{2x}-2+x^2+\cancel{2x}) = e^{-x}(x^2-2)$$

ZERI DI f''

$$e^{-x}(x^2-2)=0 \implies x = \pm\sqrt{2}$$ CANDIDATI FLESSI

SEGNO DI f''

$$e^{-x}(x^2-2)>0 \implies x^2-2>0 \implies x<-\sqrt{2} \ \vee \ x>\sqrt{2}$$



$x=-\sqrt{2}$ $\quad f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}+2)^2 e^{\sqrt{2}} \cong 1{,}41$ $\quad F_1(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$

$x=\sqrt{2}$ $\quad f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+2)^2 e^{-\sqrt{2}} \cong 2{,}83$ $\quad F_2(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$