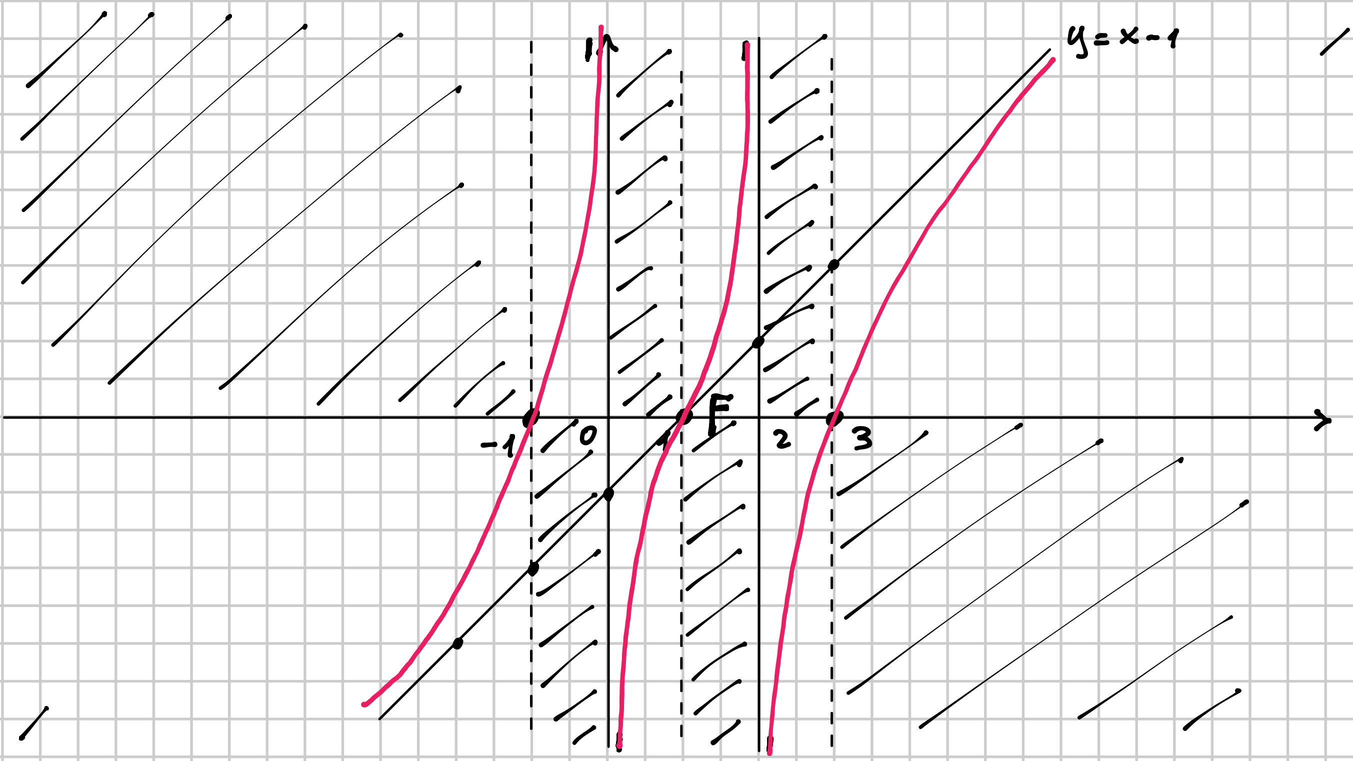
STUDIO COMPLETO DI FUNZIONE

99 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x}$

1) DOMINIO $x^2 - 2x \neq 0$ $x(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \vee x \neq 2$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$



2) INT. ASSI

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(x-2)} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$x^2(x-3) - (x-3) = 0$

$(x^2 - 1)(x-3) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-3) = 0$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 3$

$(1,0)$ $(-1,0)$ $(3,0)$

INT. ASSE y non c'è perché $x=0$ non è nel dominio

3) SEGNO

$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x(x-2)}$$

$x - 3 > 0$ $x > 3$

$x - 1 > 0$ $x > 1$

$x + 1 > 0$ $x > -1$

$x > 0$

$x - 2 > 0$ $x > 2$

-1	0	1	2	3	
−	−	−	−	−	+
−	−	−	+	+	+
−	+	+	+	+	+
−	−	+	+	+	+
−	−	−	−	+	+
−	+	−	+	−	+

4) LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+\dots}{x^2+\dots} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+\dots}{x^2+\dots} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{-1\cdot1\cdot(-3)}{0^-\cdot(-2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x(x-2)} = \frac{1\cdot3\cdot(-1)}{2\cdot0^-} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} \dots = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

5) ASINTOTI OBLIQUI

per $x\to-\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{x^2(x-2)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+\dots}{x^3+\dots} = 1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-2x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}-3x^2-x+3-\cancel{x^3}+2x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-x+3}{x^2-2x} = -1$$

stessa cosa per $x\to+\infty$

$y = x-1$ per $x\to\pm\infty$

ASINTOTO OBLIQUO

6) STUDIO DERIVATA PRIMA $\quad y = \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-2x} \qquad x \neq 0 \quad x \neq 2$

$$y' = \frac{(3x^2-6x-1)(x^2-2x)-(2x-2)(x^3-3x^2-x+3)}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{3x^4-\cancel{6x^3}-6x^3+12x^2-x^2+\cancel{2x}-2x^4+\cancel{6x^3}+2x^2-6x+2x^3-6x^2-\cancel{2x}+6}{(x^2-2x)^2}$$

$$= \frac{x^4-4x^3+7x^2-6x+6}{(x^2-2x)^2}$$ ← dovrei applicare Ruffini al numeratore, ma non funziona... o comunque è troppo lungo

Considero $g(x) = x^4-4x^3+7x^2-6x+6$ ← NUMERATORE

$$g'(x) = 4x^3-12x^2+14x-6 =$$
$$= 2(2x^3-6x^2+7x-3) =$$ ← applico Ruffini con $x=1$

	2	−6	7	−3
1		2	−4	3
	2	−4	3	//

$$= 2\underbrace{(2x^2-4x+3)}_{>0}(x-1)$$
perché $\Delta < 0$

		1	
$g'(x)$	−	|	+
	↘	P.TO MIN	↗

$x=1$ è un punto di MINIMO ASSOLUTO per il numeratore $g(x)$

$g(1) = 1-4+7-\cancel{6}+\cancel{6} = 4$ quindi, essendo $g(1)$ il valore minimo, ho che $g(x)>0 \quad \forall x$

Ciò significa che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in D$

		0		2	
f'	+	|	+	|	+
	↗		↗		↗

f è strett. crescente in ogni sottointervallo in cui è suddiviso il dominio (non ci sono max e min)

7) STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

$$y' = \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$y'' = \frac{(4x^3 - 12x^2 + 14x - 6)(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)\cdot(2x - 2)(x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6)}{(x^2 - 2x)^4}$$

$$= \dots = -\frac{6(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{(x-2)^3 x^3} =$$

CON IL COMPUTER

SCOMPONIAMO CON RUFFINI

	1	−3	6	−4
1		1	−2	4
	1	−2	4	//

$$= -\frac{6\overbrace{(x^2 - 2x + 4)}^{>0 \text{ perché } \Delta < 0}(x-1)}{(x-2)^3 x^3}$$

ATTENZIONE AL MENO!

$x - 1 > 0 \quad x > 1$

$(x-2)^3 > 0 \quad x > 2$

$-x^3 > 0 \quad x < 0$

	$x<0$	0 … 1	1 … 2	$x>2$
$x-1$	−	−	+	+
$(x-2)^3$	−	−	−	+
$-x^3$	+	−	−	−
f''	+	−	−	+

$+ \quad \nexists \quad - \quad 0 \quad + \quad \nexists \quad -$ (con $\nexists$ in $x=0$ e $x=2$, 0 in $x=1$)

$\cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap$

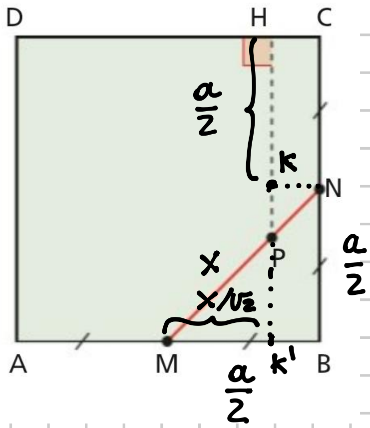
P.TO DI FLESSO

UNICO ZERO DI f'' È $x = 1$ (CANDIDATO FLESSO)

punto del grafico $F(1, 0)$

478 Sia $ABCD$ un quadrato di lato a. Determina un punto P sul segmento MN che congiunge i punti medi M e N rispettivamente dei segmenti AB e CB in modo che sia minima la somma $\overline{PH}^2 + \overline{PM}^2$.

$\left[\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{3} a\right]$



$\overline{MN} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leq x \leq a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PM} = x$

$\overline{PH} = \frac{a}{2} + \overline{PK}$

$\overline{MK'} = \frac{x}{\sqrt{2}} \qquad \overline{K'B} = \frac{a}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} = \overline{PK}$

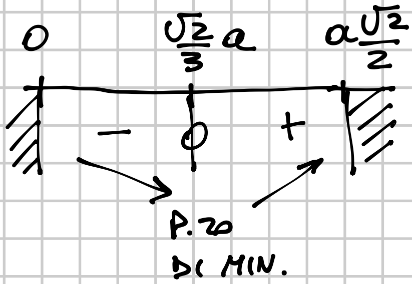
$f(x) = \overline{PH}^2 + \overline{PM}^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2 = \left(a - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2 =$

$= a^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{2a}{\sqrt{2}}x + x^2 = \frac{3}{2}x^2 - \sqrt{2}ax + a^2$ FUNZIONE DA MINIMIZZARE

$f'(x) = 3x - \sqrt{2}a \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - \sqrt{2}a = 0$

$x = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ CANDIDATO MIN

$f'(x) > 0 \qquad x > \frac{\sqrt{2}}{3}a$



$\boxed{x = \frac{\sqrt{2}}{3}a \text{ P.TO DI MINIMO}}$