OSSERVAZIONE

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt[3]{x^2(1-x)}+x\right]=+\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \quad \text{LIMITE NOTEVOLE}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^2-x^3\right)^{1/3}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)\right)^{1/3}+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}-1\right)^{1/3}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}+x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1}{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{1/3}-1}{t}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}}$$

CAMBIO DI VARIABILE

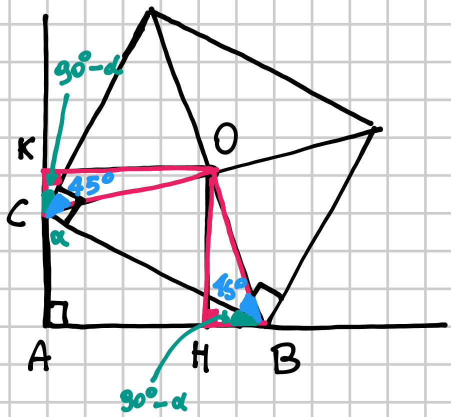
$$-\frac{1}{x}=t$$

$t\to 0$ per $x\to-\infty$

QUESITI ESAME DI STATO 2023

1 Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A.

Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.



DIM. CHE $\overline{OH} = \overline{OK}$

Dimostro che $OHB \cong OKC$

OHB e OKC sono triangoli rettangoli con ipotenusa congruente e un angolo acuto di $(45° + 90° - \alpha)$

quindi sono congruenti e $OH \cong OK$

6 Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax^3 - bx}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - b}{3x^2} = \frac{1-b}{0}$$

se $b \neq 1$ il limite è ∞

dunque, affinché il limite sia 1 deve essere $b = 1$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 3ax^2 - 1}{3x^2} = \frac{0}{0} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6x} + \lim_{x \to 0} \frac{-6ax}{6x} = -\frac{1}{6} - a$$

IMPONGO $-\frac{1}{6} - a = 1 \Rightarrow a = -\frac{7}{6}$

$$\boxed{\begin{cases} a = -\frac{7}{6} \\ b = 1 \end{cases}}$$

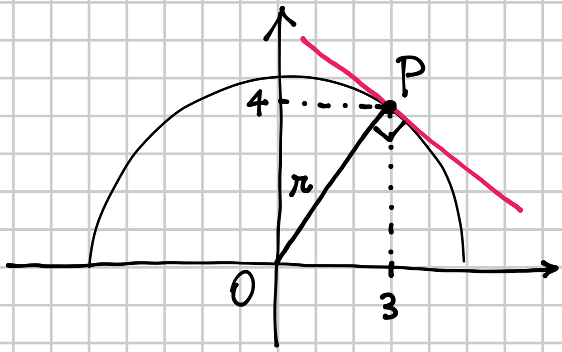
5 Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

$y = \sqrt{25 - x^2}$

$\begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$

CIRC. DI RAGGIO 5 E CENTRO $O(0,0)$

SEMICIRC. SUPERIORE



1) $P(3, 4)$

$\sqrt{25 - 3^2}$

$m_{OP} = \frac{4}{3}$ $m = -\frac{3}{4}$

coeff. angolare tangente

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 4$

$\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$

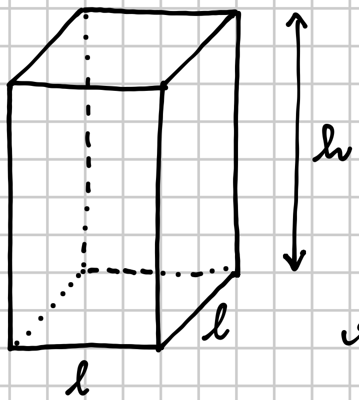
2) $y = \sqrt{25 - x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{4}$

TANGENTE $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ .... $\boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$

4 Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.



$h = \frac{V}{l^2}$

$\mathcal{A}_{BASE} = l^2$

V FISSATO

$$A_{TOTALE} = 2\mathcal{A}_{BASE} + 4\overbrace{l \cdot h}^{\text{FACCIA LATERALE}} =$$

$$= 2l^2 + 4l \cdot \frac{V}{l^2} =$$

$$= 2l^2 + 4\frac{V}{l}$$

$l \geq 0$

FUNZIONE $A_{TOT}(l) = 2l^2 + 4\frac{V}{l}$

$l > 0$

DERIVATA $A'_{TOT}(l) = 4l - \frac{4V}{l^2}$

ZERI $4l - \frac{4V}{l^2} = 0$

$\cancel{4}l = \frac{\cancel{4}V}{l^2}$ $\quad l^3 = V$ $\quad l = \sqrt[3]{V}$

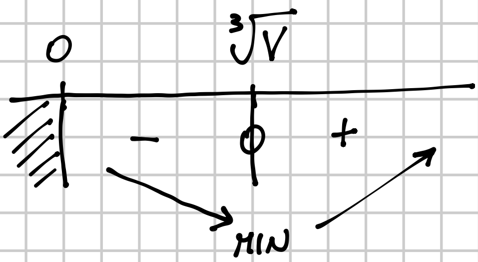
CANDIDATO MIN (MAX)

SEGNO $4l - \frac{4V}{l^2} > 0$

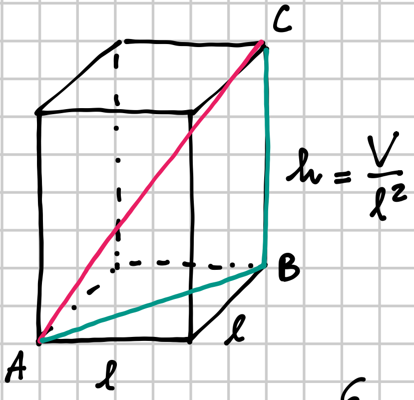
$4l > \frac{4V}{l^2}$

$\cancel{4}l^3 > \cancel{4}V$

$l > \sqrt[3]{V}$



Il parallelepipedo di area totale minima si ha per $l = \sqrt[3]{V}$



FUNZIONE DIAGONALE

$$d = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{(\ell\sqrt{2})^2 + \left(\frac{V}{\ell^2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2\ell^2 + \frac{V^2}{\ell^4}} = \sqrt{\frac{2\ell^6 + V^2}{\ell^4}} = \frac{\sqrt{2\ell^6+V^2}}{\ell^2}$$

$$d'(\ell) = \frac{\frac{\cancel{12}^{\,6}\ell^5}{\cancel{2}\sqrt{2\ell^6+V^2}} \cdot \ell^2 - 2\ell\sqrt{2\ell^6+V^2}}{\ell^4} =$$

$$= \frac{\frac{6\ell^7 - 2\ell(2\ell^6+V^2)}{\sqrt{2\ell^6+V^2}}}{\ell^4} = \frac{6\ell^7 - 4\ell^7 - 2\ell V^2}{\ell^4\sqrt{2\ell^6+V^2}} =$$

$$= \frac{2\ell^7 - 2\ell V^2}{\ell^4\sqrt{2\ell^6+V^2}}$$

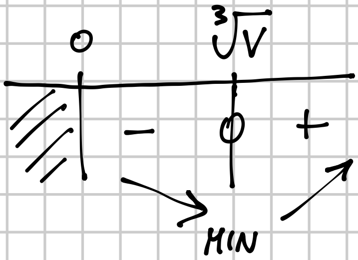
ZERI di $d'(\ell)$ $\qquad 2\ell^7 - 2\ell V^2 = 2\ell(\ell^6 - V^2) = 0$ $\nearrow$ $\ell = 0$ N.A. $\searrow$ $\ell^6 = V^2$

$\ell = \sqrt[3]{V}$

CANDIDATO MIN (MAX)

SEGNO di $d'(\ell)$ $\qquad 2\ell^7 - 2\ell V^2 > 0$

$\ell^6 - V^2 > 0 \Rightarrow \ell > \sqrt[3]{V}$



il parallelepipedo di diagonale minima è quello che corrisponde a $\ell = \sqrt[3]{V}$

RISPOSTA = Sì, il parallelepipedo di area totale minima ha anche diagonale minima

2 Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:

- un numero primo;
- un numero almeno pari a 3;
- un numero al più pari a 3.

FACCIA	1	2	3	4	5	6	
PROBABILITÀ	p	$2p$	p	$2p$	p	$2p$	$= \boxed{9p = 1}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\Downarrow$ $p = \frac{1}{9}$

$$P(\text{NUMERO PRIMO}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$\uparrow$ 2, 3, 5

$$P(\text{ALMENO } 3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$\uparrow$ 3, 4, 5, 6

$$P(\text{AL MASSIMO } 3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$\uparrow$ 1, 2, 3