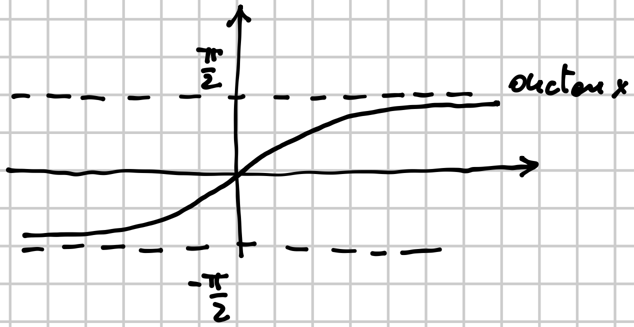
QUESITI ESAME DI STATO 2023

7 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \quad \text{CONTINUITÀ}$$



$$\lim_{x \to 0^-} (-1 + \arctan x) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b)$$

$$-1 = b$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ ax - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

DEVO CONTROLLARE IN $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

CONDIZIONE DI DERIVABILITÀ IN $x = 0$
(IL LIMITE DEVE ESSERE LO STESSO E FINITO)

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \to 0^+} a$$

$$1 = a$$

quindi $f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $f'(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, dunque non esiste alcun punto c tale che $f'(c) = 0$, cioè la tesi del TH. ROLLE non vale. Allora ciò significa che le ipotesi non possono essere soddisfatte. Infatti f è strett. crescente e $f(a) < f(b)$ per ogni intervallo $[a, b]$

8 Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Studiamo il segno della derivata

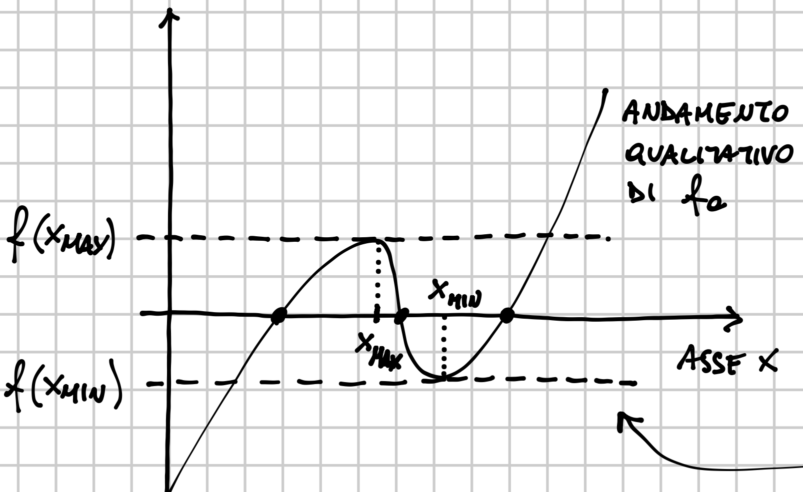
$$f_a'(x) = 5x^4 - 5a$$

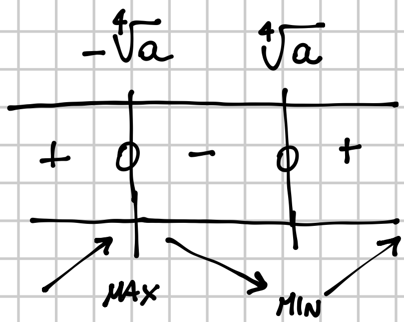
$$f_a'(x) > 0 \Rightarrow \quad 5x^4 - 5a > 0 \qquad 5x^4 > 5a$$

$$\underset{\text{BIQUADRATICA}}{x^4 > a} \qquad \underset{\text{IMPOSSIBILE}}{x^2 < -\sqrt{a}} \quad \vee \quad x^2 > \sqrt{a}$$

$$\Downarrow$$

$$x < -\sqrt[4]{a} \quad \vee \quad x > \sqrt[4]{a}$$





Affinché ci siano 3 soluzioni, l'asse x deve intersecare 3 volte il grafico, quindi così

Dunque deve essere

$$\begin{cases} f(x_{MAX}) > 0 \\ f(x_{MIN}) < 0 \end{cases}$$

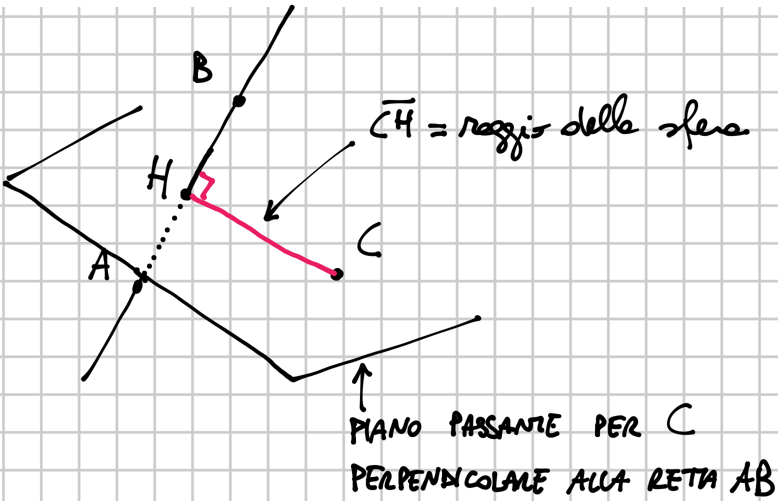
$$f(\underbrace{-\sqrt[4]{a}}_{x_{MAX}}) = (-\sqrt[4]{a})^5 - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a =$$

$$= 4a\sqrt[4]{a} + a$$

$$f(\underbrace{\sqrt[4]{a}}_{x_{MIN}}) = (\sqrt[4]{a})^5 - 5a\sqrt[4]{a} + a = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = -4a\sqrt[4]{a} + a$$

$$\begin{cases} 4a\sqrt[4]{a} + a > 0 \\ -4a\sqrt[4]{a} + a < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[4]{a} > -\frac{1}{4} \Rightarrow \forall a > 0 \\ \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Rightarrow a > \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \end{cases} \qquad \boxed{a > \frac{1}{256}}$$

3 Considerata la retta r passante per i due punti $A(1;-2;0)$ e $B(2;3;-1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1;-6;7)$ e tangente a r.



VETTORE DIREZIONE DELLA RETTA

$$\vec{AB} = (2-1,\ 3-(-2),\ -1-0) = (1,\ 5,\ -1)$$

RETTA AB (in forma parametrica)

$$\begin{cases} x = 1 + 1\cdot t \\ y = -2 + 5\cdot t \\ z = 0 + (-1)\cdot t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+5t \\ z = -t \end{cases}$$

Un piano perpendicolare alla retta AB ha equazione del tipo

$$x + 5y - z + k = 0$$

Sostituisco le coordinate di $C(1,-6,7)$ e trovo il piano $\perp$ ad AB passante per C

$$1 - 30 - 7 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 36$$

$$x + 5y - z + 36 = 0$$

Interseco questo piano con la retta AB per trovare H

$$\begin{cases} x + 5y - z + 36 = 0 \\ x = 1+t \\ y = -2+5t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow \quad 1+t+5(-2+5t)+t+36=0$$

$$1+t-10+25t+t+36=0$$

$$27t+27=0 \Rightarrow t=-1 \qquad H(0,-7,1)$$

RAGGIO SFERA $\quad \overline{CH} = \sqrt{(1-0)^2+(-6+7)^2+(7-1)^2} = \sqrt{1+1+36} = \sqrt{38}$

EQ. SFERA $\quad \boxed{(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2 = 38}$