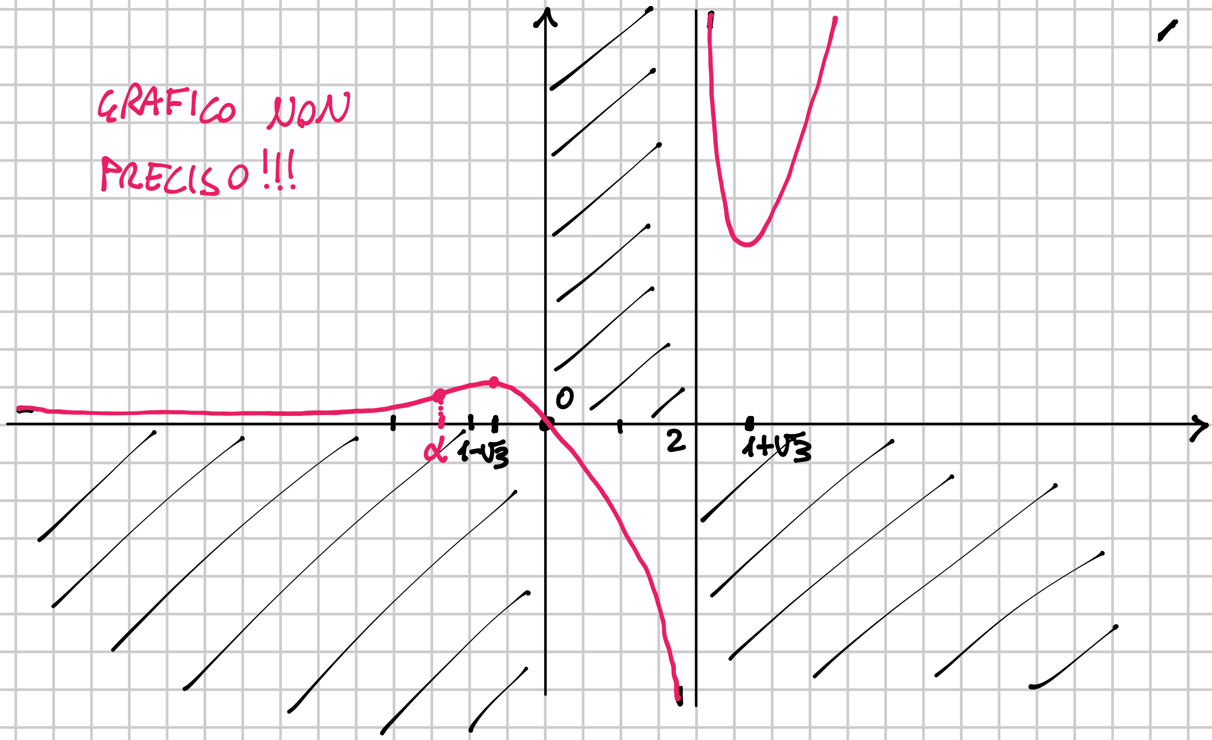
STUDIO DI FUNZIONE

31 $y = \frac{xe^x}{x-2}$ [a: $y = 0$; max$(1-\sqrt{3};\ldots)$; min$(1+\sqrt{3};\ldots)$; flesso in $x = \alpha, \alpha \in]-2;-1[$]

1) DOMINIO $x-2 \neq 0$ $x \neq 2$ $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

GRAFICO NON PRECISO !!!



2) INT. ASSI

$$\begin{cases} y = \frac{xe^x}{x-2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \frac{xe^x}{x-2} = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad O(0,0)$$

3) SEGNO

$$\frac{xe^x}{x-2} > 0 \Rightarrow$$

N] $xe^x > 0 \Rightarrow x > 0$

D] $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

	0	2	
N	−	+	+
D	−	−	+
	+	−	+

4) LIMITI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{x-2} = e^{-\infty} = 0$$ $y = 0$ ASINTOTO ORIZZ. per $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x-2} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{xe^x}{x-2} = \frac{2e^2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{xe^x}{x-2} = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty$$

$x = 2$ ASINTOTO VERTICALE

5) EVENTUALE ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}(x-2)} = +\infty$$ NON C'È ASINTOTO OBLIQUO PER $x \to +\infty$

6) STUDIO DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \frac{xe^x}{x-2} \qquad x \neq 2$$

$$f'(x) = \frac{(xe^x)'(x-2) - xe^x}{(x-2)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(x-2) - xe^x}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{e^x[(x+1)(x-2) - x]}{(x-2)^2} = \frac{e^x[x^2 - 2x \cancel{+x} - 2 \cancel{-x}]}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{e^x[x^2 - 2x - 2]}{(x-2)^2}$$

ZERI DI f'

$f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 2 = 0 \qquad x = 1 \pm \sqrt{3}$

$x \neq 2 \qquad \frac{\Delta}{4} = 3$

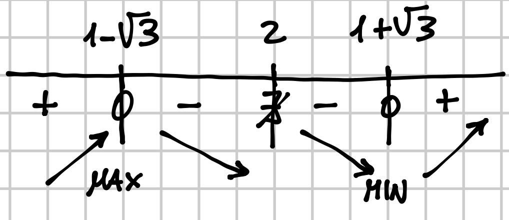
SEGNO DI f'

$f'(x) > 0 \implies x^2 - 2x - 2 > 0 \qquad (x < 1 - \sqrt{3} \lor x > 1 + \sqrt{3}) \land x \neq 2$

$x \neq 2$

$1 - \sqrt{3} \simeq -0{,}73$

$1 + \sqrt{3} \simeq 2{,}73$



$f(1-\sqrt{3}) \simeq 0{,}13$

$f(1+\sqrt{3}) \simeq 57{,}3$

I PUNTI DEL GRAFICO CORRISPONDENTI AL MAX E AL MIN SONO:

$M_1(1-\sqrt{3}, 0{,}12\ldots)$ MAX $\qquad$ $M_2(1+\sqrt{3}, 57{,}34\ldots)$ MIN

7) STUDIO DERIVATA SECONDA

$$f'(x) = \frac{e^x[x^2-2x-2]}{(x-2)^2} \qquad x \neq 2$$

$$f''(x) = \frac{[e^x(x^2-2x-2)+e^x(2x-2)](x-2)^2 - e^x(x^2-2x-2)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} =$$

$x \neq 2$

$$= \frac{e^x[(x^2-\cancel{2x}-2+\cancel{2x}-2)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-2x-2)]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{e^x[(x^2-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-2x-2)]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x-2)[(x^2-4)(x-2) - 2(x^2-2x-2)]}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{e^x\cancel{(x-2)}[x^3-2x^2-\cancel{4x}+8-2x^2+\cancel{4x}+4]}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{e^x[x^3-4x^2+12]}{(x-2)^3}$$

Devo studiare il fattore x^3-4x^2+12

$g(x) = x^3 - 4x^2 + 12$ $\qquad$ $g(-2) = -8 - 16 + 12 < 0$

g è continua $\qquad$ $g(-1) = -1 - 4 + 12 > 0$

$\Downarrow$

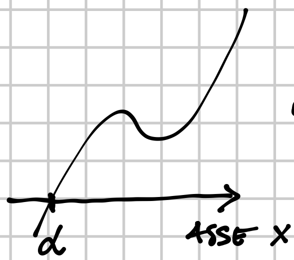
IL TEOREMA DEGLI ZERI MI DICE
C'È ALMENO UNA SOLUZIONE $\alpha \in (-2, -1)$

$g'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}$

SEGNO

	0		$8/3$	
$+$		$-$		$+$
$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$



$g\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 12$

$= 2{,}51\ldots > 0$

quindi l'asse x interseca la $g(x)$ <u>in un solo</u> punto

$x = \alpha \in (-2, -1)$ è un CANDIDATO FLESSO

$$f''(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{\boxed{1}} \overbrace{\left[x^3 - 4x^2 + 12\right]}^{\boxed{2}}}{\underbrace{(x-2)^3}_{\boxed{3}}} \qquad x \neq 2$$

<u>SEGNO DI $f''(x)$</u>

$f''(x) > 0$ $\qquad$ $\boxed{1}$ $e^x > 0 \quad \forall x$

$\boxed{2}$ $x^3 - 4x^2 + 12 > 0 \Rightarrow x > \alpha$

$\boxed{3}$ $(x-2)^3 > 0 \Rightarrow x > 2$

		α		2	
$\boxed{1}$	$+$		$+$		$+$
$\boxed{2}$	$-$		$+$		$+$
$\boxed{3}$	$-$		$-$		$+$
f''	$+$		$-$		$+$
	$\cup$	$\uparrow$	$\cap$		$\cup$

P.TO DI FLESSO α CON $-2 < \alpha < -1$

GRAFICI GEOGEBRA