107 Considera la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

a. Determina gli asintoti della funzione $f(x)$.

b. Dimostra che esistono due numeri reali A e B tali che $f(x) = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$ e che la funzione non ammette punti di estremo relativo.

c. Disegna il grafico della funzione, determinando l'equazione della tangente inflessionale.

d. Calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n))$.

[a) $x = 0$, $x = -1$, $y = 0$; b) $A = 1$, $B = -1$; c) $y = 32x + 16$; d) 1]

a) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$ $x = -1$ ASINTOTO VERT.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$ $x = 0$ AS. VERT.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(2 + \overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}{x^{\cancel{2}}(x+1)^2} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \ldots = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

$y = 0$ è AS. ORIZZ. per $x \to \pm\infty$

b)

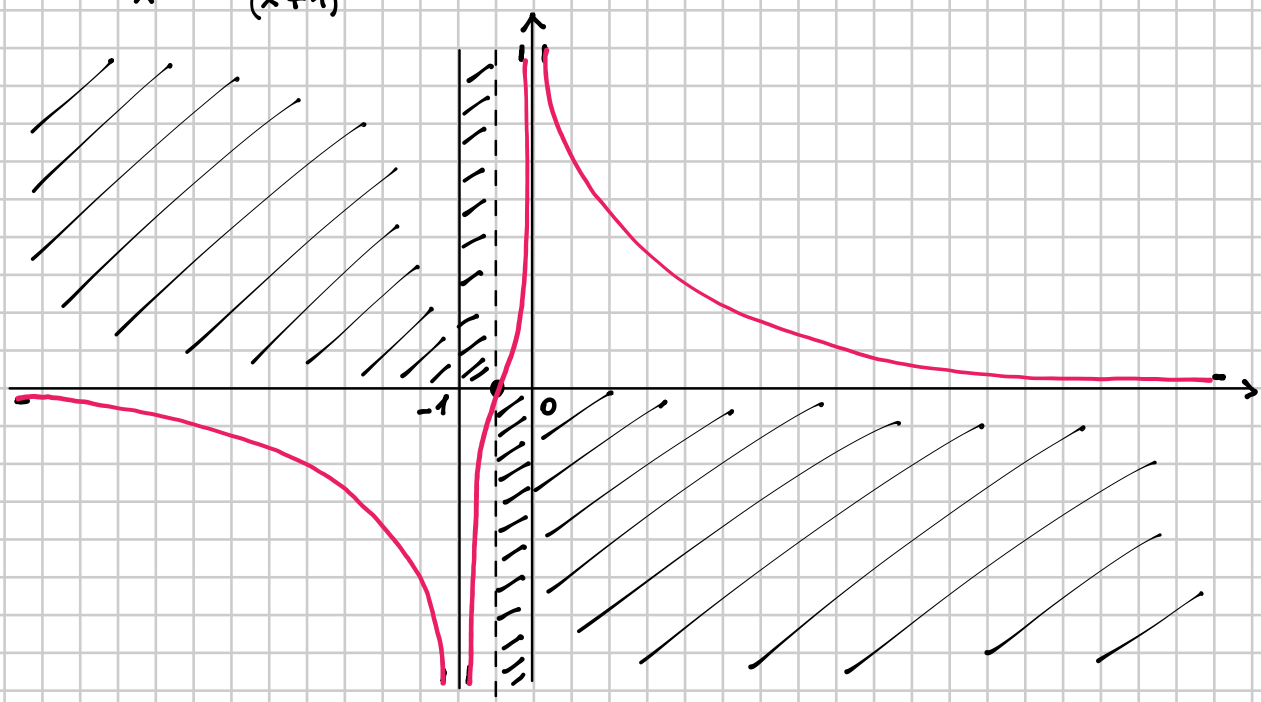
$$\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{A(x^2+2x+1) + Bx^2}{x^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + 2Ax + A}{x^2(x+1)^2}$$

confrontando i numeratori $\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$ $\begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad D = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$



SEGNO

$f(x) > 0 \qquad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \qquad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{(x+1)^2} \qquad (x+1)^2 > x^2$

$\cancel{x^2} + 2x + 1 > \cancel{x^2}$

$x > -\frac{1}{2}$

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0$

$- \quad \nexists \quad - \quad 0 \quad + \quad \nexists \quad +$

$-\frac{1}{2}$ è uno zero di f

DERIVATA PRIMA

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = x^{-2} - (x+1)^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3} + 2(x+1)^{-3} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \qquad -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3} = 0$

$\frac{\cancel{2}}{x^3} = \frac{\cancel{2}}{(x+1)^3} \qquad x^3 = (x+1)^3$

$\cancel{x^3} = \cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1 \qquad 3x^2 + 3x + 1 = 0$

(oppure applico la radice cubica a entrambi i membri: $x = x+1$ IMPOSS.)

$3x^2+3x+1=0 \qquad \Delta = 9-12<0 \quad$ IMP. NON CI SONO PUNTI STAZIONARI

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}+\frac{2}{(x+1)^3} > 0 \qquad -\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^3} > 0$$

$$\frac{-(x+1)^3+x^3}{x^3(x+1)^3} > 0 \qquad \frac{-(x^3+3x^2+3x+1)+x^3}{x^3(x+1)^3} > 0$$

$$\frac{-\cancel{x^3}-3x^2-3x-1+\cancel{x^3}}{x^3(x+1)^3} > 0 \xrightarrow{\text{CAMBIO DI SEGNO}} \frac{\overbrace{3x^2+3x+1}^{>0\ \forall x \text{ perché } \Delta<0}}{x^3(x+1)^3} < 0$$

NUMERATORE $>0 \quad \forall x$

DENOMINATORE $>0 \quad x<-1 \ \vee \ x>0$

	-1		0	
+		+		+
+		−		+
+		−		+

è la soluzione dell'ultima disequazione scritta

$\boxed{-1<x<0}$ è dove l'ultima espressione è verificata

DERIVATA

		-1		0	
$f'(x)$	−	$\nexists$	+	$\nexists$	−
	↘		↗		↘

OPPURE

$$-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{(x+1)^3} > 0 \qquad -\frac{1}{x^3} > -\frac{1}{(x+1)^3} \qquad \frac{1}{x^3} < \frac{1}{(x+1)^3}$$

$\Downarrow$

applico la $\sqrt[3]{\ }$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{x+1}$$

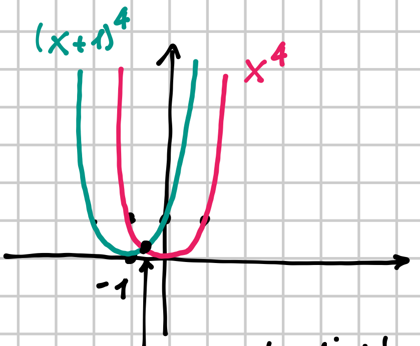
⋮

DERIVATA SECONDA

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3} = -2x^{-3} + 2(x+1)^{-3} \qquad x \neq 0 \quad x \neq -1$$

$$f''(x) = 6x^{-4} - 6(x+1)^{-4} = \frac{6}{x^4} - \frac{6}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \qquad \frac{6}{x^4} - \frac{6}{(x+1)^4} = 0 \qquad \frac{\cancel{6}}{x^4} = \frac{\cancel{6}}{(x+1)^4} \qquad x^4 = (x+1)^4$$



1 solo punto di intersezione $= -\frac{1}{2}$

$\Downarrow$ applico la radice 4ª a entrambi i membri

$$x = \pm(x+1)$$

$$x = -x-1 \qquad\qquad \cancel{x} = \cancel{x}+1$$

$$2x = -1 \qquad\qquad 0 = 1 \text{ IMP.}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

SEGNO DI f''

$$f''(x) > 0$$

$$\frac{6}{x^4} - \frac{6}{(x+1)^4} > 0 \qquad \frac{1}{x^4} > \frac{1}{(x+1)^4} \qquad x^4 < (x+1)^4$$

$\Downarrow$ dal grafico

$$x > -\frac{1}{2}$$

		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
f''	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
	$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$

P.TO DI FLESSO

$$F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

TANGENTE INFLESSIONALE $\qquad y - 0 = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3} \qquad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^3} = +\frac{2}{\frac{1}{8}} + \frac{2}{\frac{1}{8}} =$$

$$= 32$$

TANGENTE $\qquad y = 32\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \boxed{y = 32x + 16}$

d) $\quad f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$$f(1) = 1 - \cancel{\frac{1}{4}}$$

$$f(2) = \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}$$

$$f(3) = \cancel{\frac{1}{3^2}} - \cancel{\frac{1}{4^2}}$$

$$\vdots$$

$$f(n) = \cancel{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \right] = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$$

Si dice PRIMITIVA di una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Ad esempio, se $f(x) = x^2$, una sua primitiva è $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ perché $F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x)$. Anche $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ è una primitiva di f. In generale $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ (c costante qualsiasi) è una primitiva di f.

TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

INTERVALLO

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile tale che $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$, allora f è costante

DIM.

$x_1, x_2 \in I$ applico Lagrange a f in $[x_1, x_2] \Rightarrow$ trovo $c \in (x_1, x_2)$

t.c. $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

ma $f'(c) = 0$ per ipotesi, dunque $f(x_2) - f(x_1) = 0$

$$\Downarrow$$

$f(x_2) = f(x_1)$ Data l'arbitrarietà di x_1, x_2, f assume sempre lo stesso valore

TEOREMA

Due primitive F, G di una stessa funzione $f: I \to \mathbb{R}$ differiscono per una costante

DIM.

Considero la funzione $F(x) - G(x)$

$$\Downarrow$$

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\forall x \in I$$

Per il TH. DERIVATA NULLA $F(x) - G(x) = c$ (costante)

$$F(x) = G(x) + c$$

QED

Quindi, ad esempio, tutte le primitive di $f(x) = x^2$ sono del tipo $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

Indichiamo l'insieme di tutte le primitive di una funzione f con l'espressione

$$\int f(x)\,dx = \{ F: I \to \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x) \ \forall x \in I \}$$

INTEGRALE INDEFINITO (DI $f(x)$ IN dx)

Quindi

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$