TEOREMA

Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in $[a; b]$, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

Vale per qualsiasi intervallo I, anche aperto o illimitato

ESEMPIO

$$\int \underbrace{\left(4x^3+3x^2+\frac{2}{5}x+1\right)}_{\text{FUNZIONE INTEGRANDA}} dx = x^4+x^3+\frac{1}{5}x^2+x+c$$

è continua e definita in $\mathbb{R}$ (intervallo $(-\infty,+\infty)$)

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE INDEFINITO

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COSTANTE}}}{c}\cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

ATTENZIONE CHE

$$\cancel{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right)}$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq -1$$

$$\int x^5\,dx = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c =$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c$$

$$\int (7x^3 + 5x - 2)\,dx = \int 7x^3\,dx + \int 5x\,dx - \int 2\,dx =$$

$$= 7\int x^3\,dx + 5\int x\,dx - 2\int dx =$$

$$= \frac{7}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + c$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{-3}\,dx - 5\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + 2\cdot\frac{1}{-3+1}x^{-3+1} - 5\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + c =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - x^{-2} - 5\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$ ATTENZIONE CHE IL DOMINIO DEVE ESSERE UN INTERVALLO !!

$$\left(\ln|x| + c\right)' = \frac{1}{|x|}\cdot \mathrm{sign}(x) = \frac{1}{x}$$

Attenzione che se il dominio di $\frac{1}{x}$ non è un intervallo, la formula non vale. Infatti, ad es.

$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ che non è un intervallo, ma l'unione di due intervalli

Una "primitiva" di $\frac{1}{x}$ potrebbe essere $f(x) = \begin{cases} \ln|x| + 1 & \text{se } x > 0 \\ \ln|x| - 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

ho che $f'(x) = \frac{1}{x}$, ma potrei considerare altre primitive che non differiscono più da f per una costante, quindi non sarebbe vero che

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$f(x)$ non è fatta così!

84 $\int \frac{(x-1)(x+2)}{x}\,dx =$ $\left[\frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| + c\right]$

$$= \int \frac{x^2 + 2x - x - 2}{x}\,dx = \int \frac{x^2 + x - 2}{x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{2}{x}\right)dx = \int \left(x + 1 - \frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - 2\ln|x| + c$$

87 $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x - 1}\,dx =$ $\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + c\right]$

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -5x^2 & +4x & x-1 \\
\cline{4-4}
-x^3 & +x^2 & & x^2 - 4x \\
\hline
// & -4x^2 & +4x & \\
 & +4x^2 & -4x & \\
\hline
 & // & // &
\end{array}
$$

$$x^3 - 5x^2 + 4x = (x-1)(x^2 - 4x)$$

$$= \int (x^2 - 4x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + c$$

107 $\int e^x(1 - 2xe^{-x})\,dx = \int (e^x - 2x)\,dx =$

$$= e^x - x^2 + c$$

109 $\int (2 - 3^x)^2\,dx$ $\left[4x - \frac{4}{\ln 3}3^x + \frac{9^x}{\ln 9} + c\right]$

$$\int (2 - 3^x)^2\,dx = \int \left(4 - 4 \cdot 3^x + \overbrace{3^{2x}}^{9^x}\right)dx =$$

$$= \int 4\,dx - 4\int 3^x\,dx + \int 9^x\,dx =$$

$$= 4x - 4 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + c$$

123 $\int \frac{-2\sin 2x}{\cos x}\,dx =$ $[4\cos x + c]$

$$= -2\int \frac{2\sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}\,dx = -4\int \sin x\,dx = -4(-\cos x + c) =$$

$$= 4\cos x + c$$

127 $\int \frac{1-8\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx =$ $[\tan x - 8\sin x + c]$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{8\cos^{\cancel{3}} x}{\cancel{\cos^2} x}\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 8\int \cos x\,dx =$$

$$= \tan x - 8\sin x + c$$

140 $\int \frac{2x^2-9}{3x^2+3}\,dx =$ $\left[\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}\arctan x + c\right]$

Ricordare che $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

$$= \int \frac{2x^2-9}{3(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x^2-9}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2\left(x^2-\frac{9}{2}\right)}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{x^2-\frac{9}{2}}{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{x^2+1-1-\frac{9}{2}}{x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\int\left[\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{\frac{11}{2}}{x^2+1}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{3}\int\left(1 - \frac{11}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{2}{3}\int dx - \frac{2}{3}\cdot\frac{11}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \boxed{\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}\arctan x + c}$$

151 $\int (x^2+2x-1)^5(x+1)\,dx =$ $\left[\frac{(x^2+2x-1)^6}{12}+c\right]$

$$= \int \frac{2}{2}(x^2+2x-1)^5(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+2x-1)^5\underbrace{(2x+2)}_{\text{derivata di}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+2x-1)^6}{6}+c = \frac{(x^2+2x-1)^6}{12}+c$$

155 $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ln^2 x + c\right]$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivata}}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$$

153 $\int e^{2x}\sqrt{5+e^{2x}}\,dx =$ $\left[\frac{1}{3}\sqrt{(5+e^{2x})^3}+c\right]$

$$= \int (5+e^{2x})^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2e^{2x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (5+e^{2x})^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{2e^{2x}}_{\text{derivata}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(5+e^{2x})^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{(5+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}+c =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(5+e^{2x})^3}+c$$