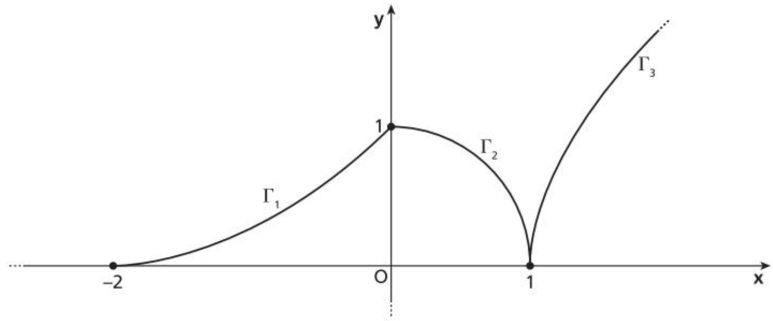
PROBLEMA ESAME DI STATO 2023

1 Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2, \quad x^2 + y^2 + b = 0, \quad x^2 - y^2 + c = 0,$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c.
Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

Γ_1: $y = a(x+2)^2$ passa per $(0,1)$ $\quad 1 = a(0+2)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}(x+2)^2$

Γ_2: $x^2+y^2+b=0$ circ. centro $O(0,0)$, raggio $1 \Rightarrow b=-1$

$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ (prendo + perché positiva dal grafico)

Γ_3: $x^2-y^2+c=0$ passa per $(1,0)$ $\quad 1-0+c=0 \Rightarrow c=-1$

$x^2-y^2-1=0 \Rightarrow y^2 = x^2-1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1}$ (prendo +)

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

f è derivabile in $[-2,2]$ in tutti i punti tranne nei punti di raccordo $x=0$ e $x=1$

Calcoliamo la derivata

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+2) & \text{se } -2\leq x<0\\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } 0<x<1\\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } 1<x\leq 2\end{cases}$$

In $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}(x+2)=1=f'_-(0)$$ DERIVATA SINISTRA IN 0

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0=f'_+(0)$$ DERIVATA DESTRA IN 0

$\Rightarrow$ $x=0$ PUNTO ANGOLOSO

In $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

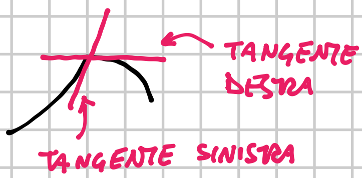
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$\Rightarrow$ $x=1$ CUSPIDE

TANGENTI

$x=-2$ retta tangente $y=0$ $\quad (f'(-2)=0)$

$x=0$ non esiste la retta tangente, ma si possono trovare le due tangenti sinistra e destra



TANGENTE SINISTRA

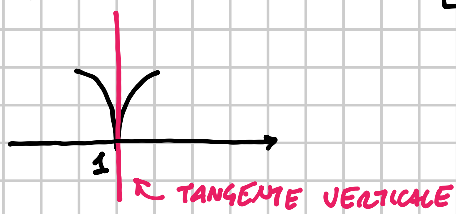
$f'_-(0)=1 \qquad P(0,1)$

$$y-1=1\cdot(x-0) \qquad \boxed{y=x+1}$$

TANGENTE DESTRA

$f'_+(0)=0 \qquad P(0,1) \qquad \boxed{y=1}$

$x = 1$ (cuspide) $\qquad P'(1,0) \qquad \boxed{x = 1}$



$x = 2 \qquad f'(2) = \dfrac{2}{\sqrt{2^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \qquad P''(2, \sqrt{3})$

$f(2) = \sqrt{2^2-1}$

$$y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) \qquad \boxed{y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) + \sqrt{3}}$$

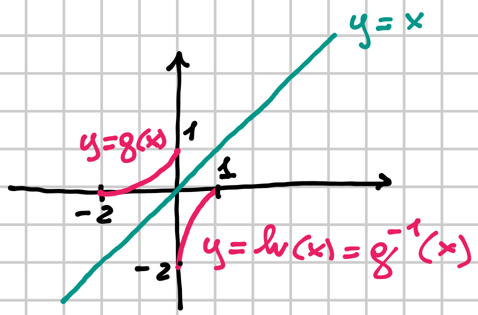
c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2;0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

$g(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2$ è invertibile poiché è INIETTIVA. Infatti si vede dal grafico che in $[-2,0]$ è strett. crescente.

$g: [-2,0] \to [0,1]$

così è BIETTIVA

$h: [0,1] \to [-2,0]$



$$y = \frac{1}{4}(x+2)^2$$

$$4y = (x+2)^2$$

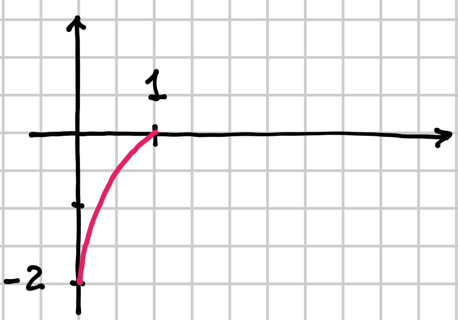
$$\pm 2\sqrt{y} = x+2$$

$$x = \pm 2\sqrt{y} - 2$$

$$y = \pm 2\sqrt{x} - 2$$

DAL GRAFICO SI VEDE CHE VA PRESO IL +

$\Rightarrow h(x) = 2\sqrt{x} - 2$



$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$h: [0,1] \to [-2,0]$ è derivabile in $(0,1]$, ma non in 0 $(h'(0) = +\infty)$

516 $\int \frac{x-3}{x^3-x^2-x+1}dx$

$$\frac{x-3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{x-3}{x^2(x-1)-(x-1)} = \frac{x-3}{(x-1)\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)}} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x^2-2x+1)+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-2A+B+C)x+A+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+B+C=1 \\ A+C=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-B \\ 3B+C=1 \\ -B+C=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ 3B+B-3=1 \\ C=B-3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=-2 \end{cases}$$

$$-\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{x-2}{(x-1)^2}dx = -\ln|x+1| + \int \frac{t+1-2}{t^2}dt =$$

$\uparrow$ $t=x-1$

$x=t+1 \quad dx=dt$

$$= -\ln|x+1| + \int \frac{t-1}{t^2}dt = -\ln|x+1| + \int \frac{\cancel{t}}{t^{\cancel{2}}}dt - \int \frac{1}{t^2}dt =$$

$$= -\ln|x+1| + \ln|t| - \frac{1}{-2+1}t^{-2+1} + C = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$$

$$= \boxed{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{x-1} + C}$$

530 $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 + 5x - 3}{x^2 - 4x + 4}\,dx$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c\right]$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -3x^3 & & +5x & -3 & x^2-4x+4 \\
\hline
-x^4 & +4x^3 & -4x^2 & & & x^2+x \\
\hline
// & x^3 & -4x^2 & +5x & -3 & \\
 & -x^3 & +4x^2 & -4x & & \\
\hline
 & // & // & x & -3 &
\end{array}$$

FUNZIONE INTEGRANDA

$$x^2 + x + \frac{x-3}{x^2-4x+4}$$

$$\int (x^2+x)\,dx + \int \frac{x-3}{(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{t-1}{t^2}\,dt =$$

$t = x-2$

$x = t+2$

$dx = dt$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|t| + \frac{1}{t} + c = \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c}$$