La formula del binomio

Una spiegazione elementare

Riccardo Dossena

27 dicembre 2015

In questo articolo vogliamo presentare una dimostrazione elementare, che eviti espliciti riferimenti di carattere combinatorio, della formula del binomio di Newton:

$$\begin{aligned}(A+B)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \\ &= \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \ldots + \binom{n}{n} B^n.\end{aligned}$$

Questa formula viene di solito incontrata dagli studenti del primo anno della scuola superiore, nella fase iniziale di acquisizione delle tecniche di manipolazione algebrica. Tuttavia, la presenza dei coefficienti binomiali rende problematica la spiegazione del motivo per cui la formula funziona. I coefficienti binomiali vengono costruiti attraverso il Triangolo di Tartaglia, ma in genere ci si accontenta di una spiegazione empirica, come si può trovare in [1, pp. 417–418].

La spiegazione che proporremo nel seguito trae spunto da quanto esposto in [2, cap. 3] e lega la costruzione del Triangolo di Tartaglia direttamente al problema della potenza del binomio.

Osserviamo innanzitutto che, dimostrando preliminarmente la formula semplificata

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^n \qquad (1)\end{aligned}$$

possiamo facilmente ricondurci al caso generale. Infatti

$$(A+B)^n = A^n \left(1 + \frac{B}{A}\right)^n = A^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B^k}{A^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Focalizzeremo quindi la nostra attenzione solo sulla formula (1). Cominceremo la nostra analisi con un esempio, da cui cercheremo di ricavare considerazioni di carattere generale.

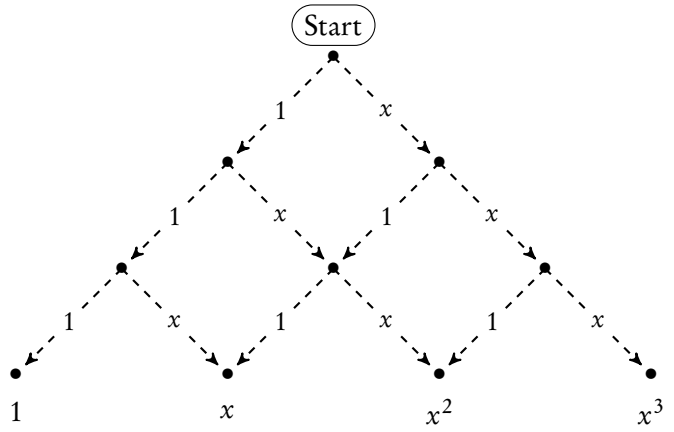
1 Un primo esempio: il cubo del binomio

Scriviamo lo sviluppo del cubo del binomio $(1+x)$ e analizziamo la struttura formale del risultato, tenendo traccia di tutti i fattori 1 e x che intervengono nelle moltiplicazioni senza eseguire le somme. Otteniamo

$$\begin{aligned}(1+x)^3 &= \underbrace{(1+x)}_{1^\circ} \cdot \underbrace{(1+x)}_{2^\circ} \cdot \underbrace{(1+x)}_{3^\circ} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + \underbrace{1 \cdot 1 \cdot x}_{\mathrm{A}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot 1}_{\mathrm{A}} + \underbrace{1 \cdot x \cdot x}_{\mathrm{B}} + \underbrace{x \cdot 1 \cdot 1}_{\mathrm{A}} + \underbrace{x \cdot 1 \cdot x}_{\mathrm{B}} + \underbrace{x \cdot x \cdot 1}_{\mathrm{B}} + x \cdot x \cdot x \qquad (2)\end{aligned}$$

dove abbiamo contrassegnato con la stessa lettera gli addendi (monomi simili) che potrebbero essere sommati. Per capirne appieno la struttura, osserviamo che lo sviluppo (2) è formato da addendi costituiti ciascuno da 3 fattori (in numero cioè pari al valore dell'esponente): il primo proveniente dal primo $(1+x)$, il secondo dal secondo $(1+x)$ e il terzo dal terzo $(1+x)$.

È possibile dare una rappresentazione grafica dello sviluppo (2) attraverso lo schema "ad albero" seguente.



Ogni addendo viene formato, partendo dalla radice "Start", immaginando di camminare lungo un percorso discendente che congiunge i nodi della figura. Al primo passo, dopo lo "Start", possiamo procedere verso sinistra oppure verso destra (operando una scelta fra 1 e x, rispettivamente, che consideriamo come primo fattore). Giunti al secondo nodo, possiamo procedere di nuovo verso destra o verso sinistra, e così di seguito fino a giungere ad uno dei nodi finali. Dal secondo nodo in poi, ogni volta che procediamo per un tratto verso sinistra eseguiamo una moltiplicazione per 1 e ogni volta che procediamo per un tratto verso destra eseguiamo una moltiplicazione per x. Il monomio indicato nel nodo di arrivo è proprio il risultato della moltiplicazione effettuata lungo il percorso.

Chiameremo questi percorsi discendenti *cammini minimi* associati al monomio di arrivo. Si noti che tutti i cammini minimi associati a uno stesso monomio sono formati dallo stesso numero di tratti destri (corrispondenti alle moltiplicazioni per x) e sinistri (corrispondenti alle moltiplicazioni per 1).

Così, ad esempio, i monomi contrassegnati con B nello sviluppo (2) (cioè i monomi x^2) vengono rispettivamente ottenuti tramite le moltiplicazioni relative ai percorsi delle figure 1, 2 e 3.

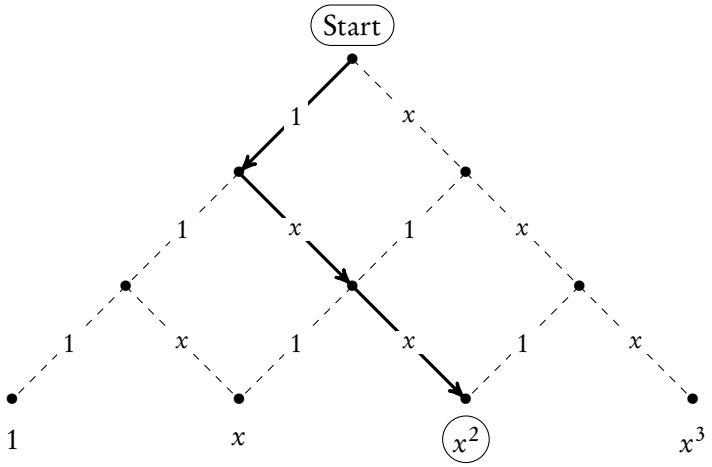


Figura 1: Il cammino minimo corrispondente al prodotto $1 \cdot x \cdot x$.

Il cubo di $(1+x)$ verrà scritto infine

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

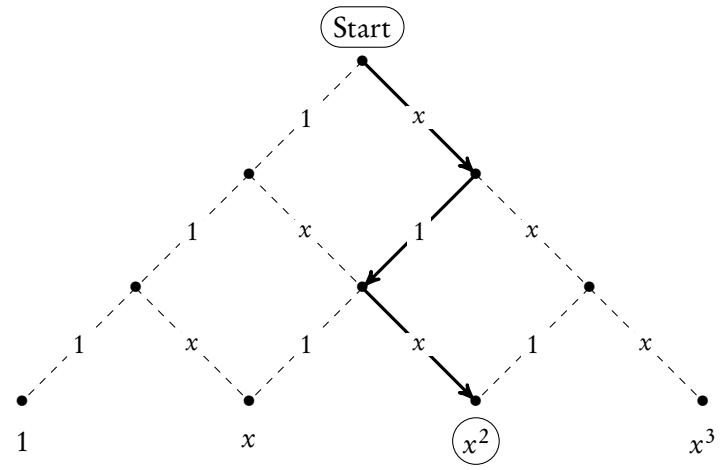


Figura 2: Il cammino minimo corrispondente al prodotto $x \cdot 1 \cdot x$.

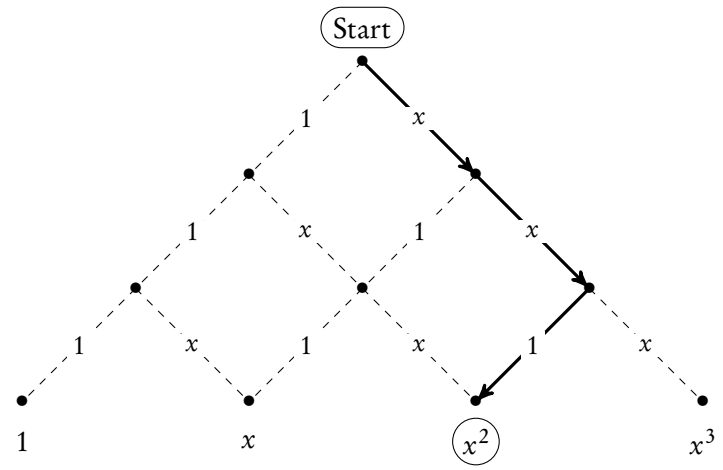


Figura 3: Il cammino minimo corrispondente al prodotto $x \cdot x \cdot 1$.

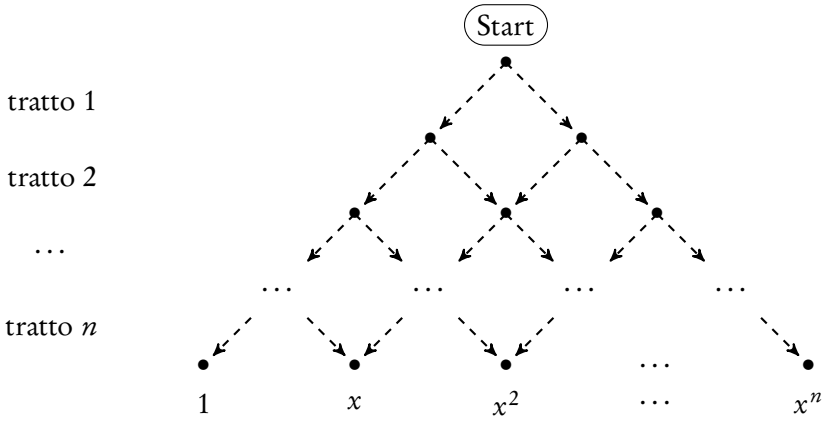
dove i coefficienti da assegnare ai monomi 1, x, x^2 e x^3 corrispondono al *numero di tutti i cammini minimi associati ai monomi stessi*. Nel caso considerato di x^2, i cammini minimi sono appunto 3.

2 Il caso generale

Quanto detto si generalizza al caso della potenza $(1+x)^n$. I monomi che compaiono nello sviluppo del prodotto

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)}_{1^\circ} \cdot \underbrace{(1+x)}_{2^\circ} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(1+x)}_{n\text{-esimo}}$$

sono $1, x, x^2, \ldots, x^n$ e ciascuno di essi può essere ottenuto in più modi, corrispondenti ai diversi cammini minimi che dallo "Start" portano allo stesso monomio (dopo aver percorso esattamente n tratti). Si intende sempre di moltiplicare per 1 se si scende di un tratto verso sinistra e per x se invece si scende di un tratto verso destra. Il coefficiente di ciascun monomio si forma contando tutti i cammini minimi ad esso associati.



I coefficienti di $1, x, x^2, \ldots, x^n$ si chiamano *coefficienti binomiali* e vengono indicati rispettivamente con i simboli

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Possiamo dire allora che

$$\boxed{\binom{n}{k} = \text{coefficiente di } x^k \text{ nello sviluppo della potenza } (1+x)^n}$$

e seguendo l'interpretazione che abbiamo adottato

$$\boxed{\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \text{numero dei cammini minimi che dallo "Start"} \\ &\quad \text{portano al nodo } x^k \text{ nello sviluppo della potenza } (1+x)^n.\end{aligned}}$$

Notiamo che si ha sempre

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{n} = 1$$

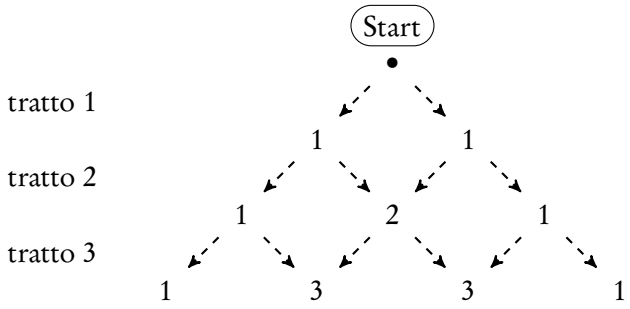
dato che sono unici i cammini minimi che permettono di giungere a 1 e a x^n.

Possiamo dunque scrivere

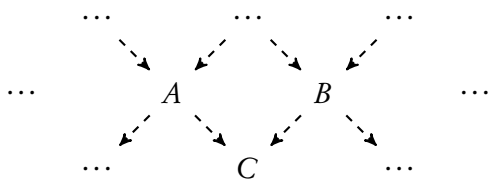
$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

3 Come costruire i coefficienti binomiali

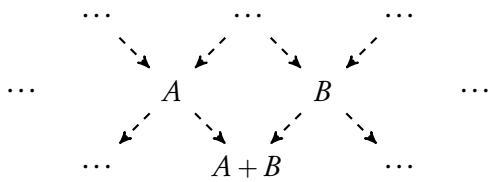
Si tratta ora di trovare un modo per calcolare i coefficienti $\binom{n}{k}$, cioè un metodo per eseguire il conteggio dei vari cammini. Scriviamo in corrispondenza di ogni nodo dello schema il numero dei percorsi discendenti con cui tale nodo può essere raggiunto a partire dallo "Start". Per i primi percorsi, corrispondenti alle potenze $n = 1, 2, 3$, è facile.



Notiamo esplicitamente che lo schema utilizzato per i coefficienti della potenza $n = 3$ contiene anche gli schemi da utilizzare nei casi $n = 2$ ed $n = 1$ (basta fermarsi alle righe precedenti). In particolare, si può osservare che il numero assegnato a un determinato nodo dipende dal numero assegnato ai nodi immediatamente superiori. Nell'esempio che segue[1], per raggiungere il nodo C dobbiamo passare necessariamente attraverso il nodo A oppure attraverso il nodo B:



e dato che da A a C vi è un solo possibile tratto, il numero dei percorsi per raggiungere C attraverso A è pari esattamente ad A. Stesso discorso per raggiungere C da B. Si ha dunque che $C = A + B$.



Questa proprietà ci permette di costruire uno schema generale dei coefficienti binomiali, che può essere utilizzato per comporre la formula di qualsiasi potenza del binomio $(1 + x)$. Per completezza possiamo inserire anche il numero 1 al posto dello "Start", perché banalmente esiste un solo modo di giungere in tale nodo (ovvero rimanere fermi). Lo schema ottenuto è, naturalmente, il *Triangolo di Tartaglia* (figura 4).

Per scrivere, ad esempio, la formula dello sviluppo di $(1+x)^5$, possiamo utilizzare i coefficienti della riga $n = 5$:

$$(1+x)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

Una volta compreso il meccanismo di costruzione dei coefficienti binomiali, si può arrivare facilmente anche alla formula generale dello sviluppo di $(A + B)^5$:

$$(A+B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5.$$

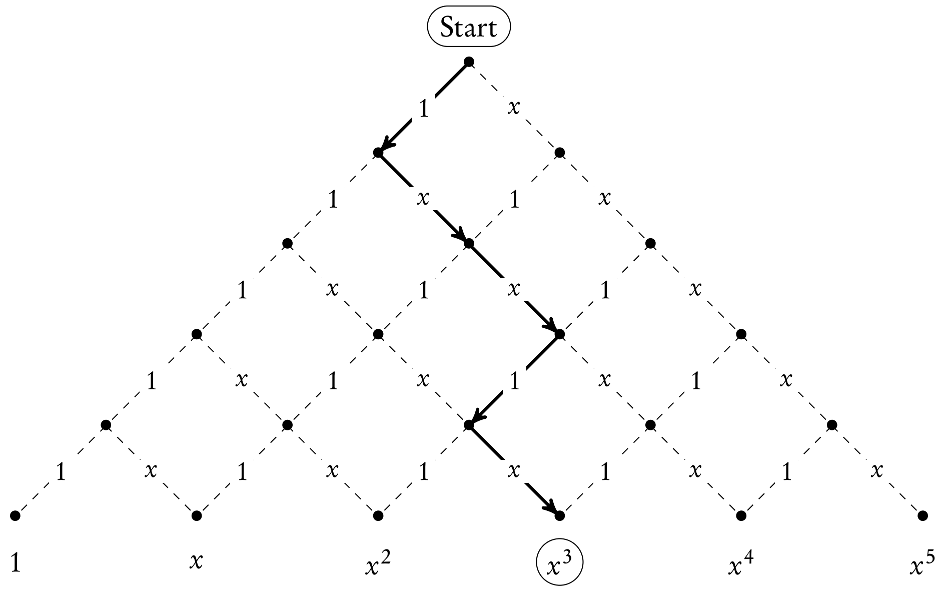
[1] Indichiamo, qui e nel seguito, con A, B e C sia i numeri assegnati ai nodi che i nodi stessi.

$n = 0$	1	$\binom{0}{0}$
$n = 1$	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$n = 2$	1 2 1	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$n = 3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$n = 4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
$n = 5$	1 5 10 10 5 1	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Figura 4: Il Triangolo di Tartaglia in relazione ai coefficienti binomiali.

4 Un'altra interpretazione dei coefficienti binomiali

Vediamo come nel diagramma ad albero relativo al binomio $(1 + x)^5$ possiamo associare ad ogni cammino minimo un sottoinsieme di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Focalizziamo l'attenzione ad esempio sul coefficiente $\binom{5}{3} = 10$ di x^3, che rappresenta il numero di cammini minimi che dallo "Start" portano a x^3, e consideriamo uno di questi cammini, ad esempio quello evidenziato nella figura seguente.



Esso corrisponde al prodotto $1 \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot x$. Possiamo associare a questo cammino minimo l'insieme $\{2, 3, 5\}$, ossia l'insieme dei numeri che ci indicano quali sono i tratti destri, cioè i fattori x del prodotto (che in questo caso sono tre). Allo stesso modo potremmo considerare un altro insieme, per esempio $\{1, 2, 4\}$, a cui è associato il cammino minimo del prodotto $x \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot 1$ (primo tratto destro, secondo destro, terzo sinistro, quarto destro, quinto sinistro), e così via. Si capisce che ad ogni sottoinsieme di cardinalità 3 dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ corrisponde un ben preciso cammino minimo che porta a x^3, e viceversa. Quindi possiamo certamente dire che il coefficiente binomiale $\binom{5}{3}$, oltre a rappresentare il numero di cammini minimi che portano a x^3 nel diagramma del binomio con esponente 5, rappresenta anche il numero di tutti i possibili sottoinsiemi di cardinalità 3 che si possono estrarre da un insieme di cardinalità 5. Il discorso è facilmente generalizzabile e porta alla seguente importante interpretazione dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \text{numero dei sottoinsiemi di cardinalità } k \text{ di un insieme di cardinalità } n.$$

Il passo ulteriore, sebbene non necessario, dovrebbe essere quello della costruzione di una formula esplicita per $\binom{n}{k}$. Questo però potrà essere rimandato ad un opportuno momento successivo in cui si parlerà di calcolo combinatorio. Gli studenti avranno comunque già consapevolezza del significato dei coefficienti binomiali.

Riferimenti bibliografici

[1] Dodero, N., Baroncini, P. e Manfredi, R., *NELLA matematica*, Algebra, Volume 1, Ghisetti e Corvi, Milano, 2008.

[2] Polya, G., *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Volume 1, John Wiley & Sons, University of Minnesota, 1962; trad. it. *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Volume 1, Feltrinelli, Milano, 1971.