Piccolo complemento ai *Fondamenti* di Hilbert

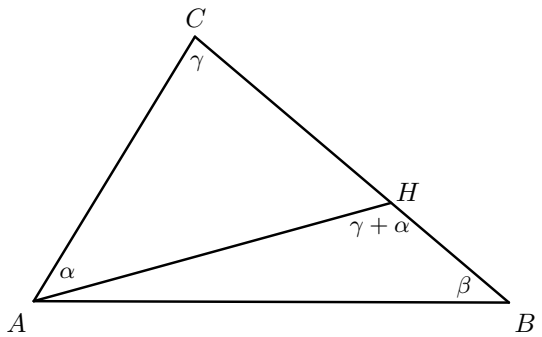
Riccardo Dossena

3 gennaio 2016

Nei *Fondamenti della geometria* [3, cap. 4, §19, p. 127] Hilbert, quando tratta l'equiscomponibilità e l'equiampliabilità dei poligoni, dimostra che in ogni geometria non-archimedea esistono due triangoli equiampliabili ma non equiscomponibili, sfruttando il seguente teorema:

un segmento, che giaccia interamente all'interno di un triangolo, è minore del lato maggiore di esso.

Tuttavia, a proposito di questo risultato, egli si limita a dire che si può dimostrare senza uso della continuità. Nel seguito ci proponiamo (umilmente) di provare questo teorema senza fare uso, appunto, della continuità. Cominciamo con tre lemmi. Sarà necessaria qualche ulteriore osservazione finale.

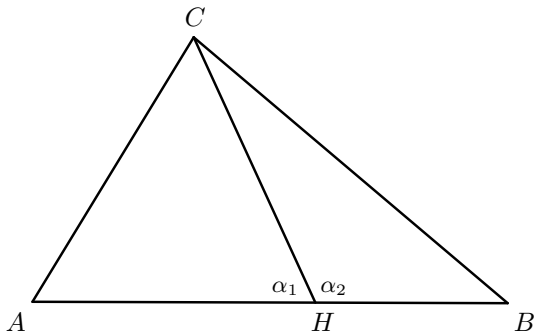


Lemma 1. *Dato un triangolo ABC, sia AB il suo lato maggiore e H un punto interno di uno degli altri due lati. Allora $AH < AB$.*

Dimostrazione. Se AB è il lato maggiore, allora $\gamma > \beta$, perché in un triangolo l'angolo interno maggiore è opposto al lato maggiore. Dunque $\beta < \gamma < \gamma + \alpha$, da cui $AH < AB$. □

Lemma 2. *Dato un triangolo ABC, sia AB il suo lato maggiore e H un punto interno di AB. Allora $CH < AB$.*

Dimostrazione. Uno dei due angoli α_1 o α_2 è ottuso oppure retto: sia ad esempio α_2. Considerando il triangolo HBC, si ha che CB, lato opposto ad α_2, è il lato maggiore. Allora $CH < CB < AB$. □



Lemma 3. *Dato un triangolo ABC, sia AB il suo lato maggiore. Siano H e K due punti di due lati diversi (eventualmente uno fra H e K può essere un vertice del triangolo). Allora $HK < AB$.*

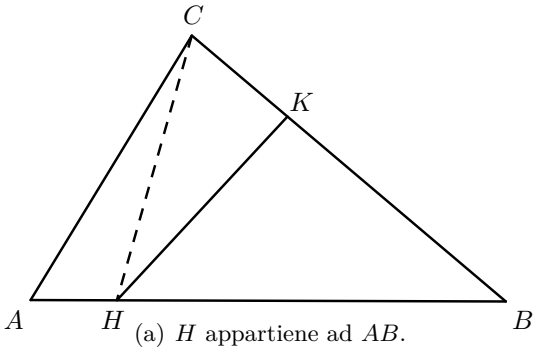
Dimostrazione. Si distinguono due casi.

(a) Un estremo del segmento HK, diciamo H, appartiene ad AB. Allora, applicando i lemmi 1 e 2 al triangolo HBC, si ha che HK è minore di uno dei lati CH, HB o CB.

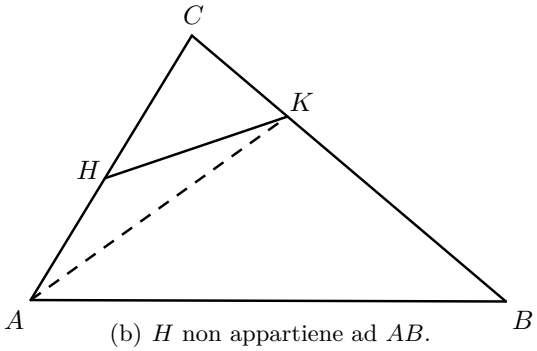
- Se $HK < CH$, allora $HK < CH < AB$ applicando il lemma 2 al triangolo ABC;
- se $HK < CB$, allora $HK < CB < AB$;
- se $HK < HB$, allora $HK < HB < AB$ perché H sta fra A e B.

(b) Nessun estremo del segmento HK appartiene ad AB. Allora, applicando i lemmi 1 e 2 al triangolo AKC, si ha che HK è minore di uno dei lati AK, CK o AC.

- Se $HK < AK$, allora $HK < AK < AB$ applicando il lemma 1 al triangolo ABC;
- se $HK < AC$, allora $HK < AC < AB$;
- se $HK < CK$, allora $HK < CK < CB < AB$ perché K sta fra C e B. □



(a) H appartiene ad AB.

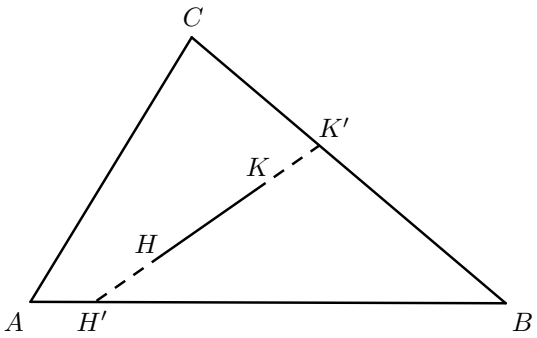


(b) H non appartiene ad AB.

Siamo pronti per dimostrare il teorema citato da Hilbert.

Teorema 4. *Dato un triangolo ABC, sia AB il suo lato maggiore e HK un segmento che giace interamente all'interno di esso. Allora $HK < AB$.*

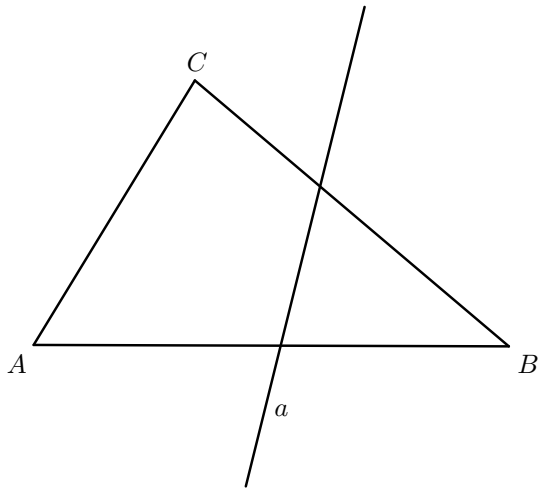
Dimostrazione. Dato il segmento HK interno al triangolo, prolunghiamolo da entrambe le parti fino a incontrare due lati del triangolo e applichiamo il lemma 3. Allora si ha $HK < H'K' < AB$. □



La dimostrazione è finita, ma sono necessarie alcune osservazioni. Essa non fa uso della continuità, ma ne siamo sicuri? È lecito prolungare un segmento interno a un triangolo fino a incontrare i suoi lati?

Richiamiamo l'assioma di Pasch, che fa parte del secondo gruppo di assiomi di Hilbert (assiomi di ordinamento).

Assioma di Pasch. *Siano A, B, C tre punti non allineati ed a una retta del piano ABC che non passi per alcuno dei punti A, B, C: allora, se la retta a passa per un punto del segmento AB, essa passa certamente anche per un punto del segmento AC ovvero per un punto del segmento BC.*



Intuitivamente, se una retta entra nell'interno di un triangolo attraverso un lato, essa ne esce pure (potrebbe capitare che ne esca dal vertice opposto al lato, anche se questo caso particolare non è considerato nella formulazione dell'assioma che abbiamo citato).

È un risultato noto che l'assioma di Pasch è equivalente al seguente

Assioma di separazione del piano. *Ogni retta a divide i punti del piano che non stanno su di essa in due regioni (semipiani) disgiunte con le seguenti proprietà: presi due punti della stessa regione, il segmento che li unisce non interseca la retta a; presi due punti appartenenti a regioni distinte, il segmento che li unisce interseca la retta a.*

Diciamo che due punti A e B stanno *dalla stessa parte* rispetto ad a se A e B appartengono entrambi allo stesso semipiano, mentre diciamo che stanno *da parti opposte* rispetto ad a se A appartiene a un semipiano e B all'altro. Dato l'assioma di separazione, valgono i due ovvi teoremini seguenti, che riportiamo e dimostriamo comunque per completezza.

Teoremino 5. *Data la retta a, siano A e B due punti distinti non appartenenti ad essa. Allora*

i) *A e B stanno da parti opposte rispetto ad a se e solo se il segmento AB interseca a;*

ii) *A e B stanno dalla stessa parte rispetto ad a se e solo se il segmento AB non interseca a.*

Dimostrazione.

i) Una implicazione è ovvia conseguenza dell'assioma di separazione. Siano ora A e B tali che AB interseca a. Se stessero dalla stessa parte apparterrebbero allo stesso semipiano e, sempre per l'assioma di separazione, il segmento AB non intersecherebbe a.

ii) Una implicazione è ovvia conseguenza dell'assioma di separazione. Siano ora A e B tali che AB non interseca a. Se stessero da parti opposte apparterrebbero a semipiani diversi e, ancora per l'assioma di separazione, il segmento AB intersecherebbe a. □

Teoremino 6. *Data la retta a, siano P e Q due punti distinti non appartenenti ad essa che stanno da parti opposte rispetto ad a, ed R un punto non appartenente ad a. Allora*

i) *se Q ed R stanno da parti opposte rispetto ad a, P ed R stanno dalla stessa parte;*

ii) *se Q ed R stanno dalla stessa parte rispetto ad a, P ed R stanno da parti opposte.*

Dimostrazione. Indichiamo i due semipiani disgiunti con H_1 e H_2, in modo che $P \in H_1$ e $Q \in H_2$.

i) Siccome Q ed R stanno da parti opposte e dato che $Q \in H_2$, necessariamente $R \in H_1$, quindi R sta dalla stessa parte di P.

ii) Siccome Q ed R stanno dalla stessa parte, $R \in H_2$, cioè R è dalla parte opposta di P. □

In uno dei teoremi che sono conseguenze degli assiomi di collegamento e ordinamento (i primi due gruppi, senza continuità), e precisamente nel teorema 9, Hilbert afferma che non vi è nessuna retta che stia interamente all'interno di un poligono. Di conseguenza, se consideriamo la retta passante per H e K nel teorema 4, essa deve necessariamente intersecare due lati del triangolo (eventualmente uno in un vertice) e dunque esistono i punti H' e K' ottenuti mediante il prolungamento del segmento HK. Purtroppo anche questo teorema non è dimostrato nei *Fondamenti* (ma se ne può trovare una dimostrazione in [1]). Vediamo allora come completare il nostro lavoro mostrando, sempre senza uso della continuità, che è possibile prolungare il segmento HK fino a intersecare i lati del triangolo.

L'*interno* di un triangolo è definito come l'intersezione dei semipiani definiti dai lati e dai vertici opposti (tranne le rette dei lati). Ci occorrono altri due risultati.

Lemma 7. *Sia r una retta, P un punto su di essa e Q un punto esterno ad essa. Tutti i punti della semiretta PQ (eccetto P) appartengono allo stesso semipiano.*

Dimostrazione. Sia A un punto della semiretta PQ distinto da P. Se A stesse dalla parte opposta di Q, AQ intersecherebbe r tra A e Q, ma l'unico punto di intersezione tra la retta PQ e r è P. Dunque P starebbe fra A e Q, per cui A non potrebbe appartenere alla semiretta PQ. □

Il prossimo teorema afferma che se una retta entra all'interno di un triangolo attraverso un vertice, ne esce dall'interno del lato opposto (l'assioma di Pasch suppone invece che la retta entri attraverso un lato). La dimostrazione è tratta da [2].

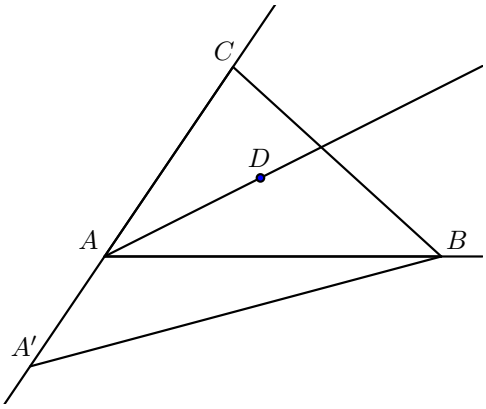
Teorema di attraversamento. *Se D è un punto interno all'angolo $\angle BAC$, allora la semiretta AD interseca il segmento BC.*

Dimostrazione. Scegliamo un punto A' sulla retta AC in modo che A stia fra A' e C. La retta AD entra nel triangolo $A'BC$ attraverso il punto A, dunque per l'assioma di Pasch interseca uno dei lati $A'B$ e BC.

Chiamiamo *semiretta opposta ad AD* la semiretta di origine A formata da A e dai punti della retta AD che *non* stanno sulla semiretta AD. Dimostriamo che la semiretta opposta ad AD non interseca i lati $A'B$ e BC, in modo da essere certi che l'intersezione fornita dall'assioma di Pasch avvenga proprio con la semiretta AD. Dal momento che D appartiene all'interno di $\angle BAC$, si trova dalla stessa parte di B rispetto ad AC. Per il lemma 7, anche i segmenti $A'B$ e BC si trovano completamente dalla stessa parte di B rispetto ad AC (ad eccezione dei punti A' e C). Siccome la retta AD interseca AC in A, la semiretta opposta ad AD sta dalla parte opposta di D, B e tutti i punti di $A'C$ e BC rispetto ad AC. Quindi, la semiretta opposta alla semiretta AD non interseca $A'B$ né BC.

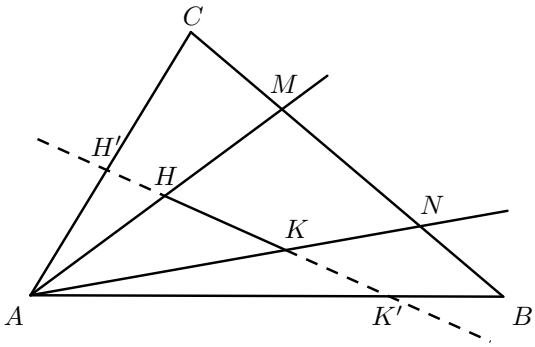
Infine, escludiamo che la semiretta AD intersechi $A'B$. Osserviamo dapprima che A' e C stanno da parti opposte rispetto ad AB, perché $A'C$ interseca la retta AB, mentre C e D stanno dalla stessa parte rispetto ad AB, perché appartengono entrambi al semipiano definito dal lato AB e dal vertice C stesso. Come conseguenza dell'assioma di separazione del piano, A'

e D stanno da parti opposte rispetto ad AB, quindi tutti i punti di $A'B$ (eccetto B) devono stare dalla stessa parte rispetto ad AB e tutti i punti della semiretta AD (eccetto A) devono stare dall'altra. Siccome $A \neq B$, la semiretta AD non può intersecare $A'B$. Quindi la semiretta AD deve necessariamente intersecare BC. $\square$



Possiamo finalmente mostrare come è possibile prolungare un segmento interno a un triangolo da entrambe le parti, fino a incontrare i suoi lati.

Sia HK un segmento interno al triangolo ABC. I suoi estremi H e K sono punti interni del triangolo, e applicando due volte il teorema di attraversamento troviamo che le semirette AH e AK intersecano il lato CB, rispettivamente nei punti M ed N. Consideriamo ora il triangolo AMC. La retta HK entra al suo interno attraverso un lato, quindi per l'assioma di Pasch ne deve uscire (da uno dei lati AC o CM). Lo stesso ragionamento si applica al triangolo ABN.



Curiosità

Il grande Imre Lakatos, nel suo articolo *What does a mathematical proof prove?* [4], porta come esempio proprio il teorema 4. Si tratta di trovare due punti P e Q appartenenti a un triangolo o al suo interno in modo che la loro distanza sia massima: allora P e Q sono necessariamente i vertici del lato maggiore. Lakatos afferma che ciò può essere dimostrato semplicemente, senza bisogno di assiomi o regole particolari (Lakatos era abbastanza allergico al formalismo). Infatti, se uno dei due punti, ad esempio P, fosse all'interno del triangolo e l'altro, Q, sul bordo, PQ ovviamente non potrebbe avere lunghezza massima (essendo possibile estendere PQ dalla parte di P); se entrambi fossero sullo stesso lato ma uno dei due non fosse un vertice, ancora non potrebbero avere massima distanza. Quindi P e Q possono avere distanza massima solo se entrambi sono vertici, dunque quando P e Q sono i vertici del lato maggiore. Tuttavia non viene trattato il caso in cui P e Q appartengono a lati diversi, per il quale si rendono necessari i nostri primi tre lemmi.

Riferimenti bibliografici

[1] Feigl, G., Über die elementaren Anordnungssätze der Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, vol. 33, 1924.

[2] Harvey, M., *Plane Geometry. An Illustrated Guide*, url: http://www.mcs.uvawise.edu/msh3e/resources/PlaneGeometryAnIllustratedGuide.pdf

[3] Hilbert, D., *Fondamenti della geometria. Con i supplementi di Paul Bernays*, Franco Angeli, 2009.

[4] Lakatos, I., What does a mathematical proof prove? In Tymoczko, T., ed.: *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhäuser, 1986, pp. 153–162.