L'algoritmo di Ruffini

Riccardo Dossena

Si tratta del ben noto procedimento di divisione di un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

per un polinomio $x - c$.

Se $P(c) = 0$, il polinomio $P(x)$ può essere scomposto nel prodotto di un (altro) polinomio di grado $n - 1$ e di $x - c$.

Ad esempio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ è tale che $P(1) = 0$, dunque

$$\begin{array}{c|rrr|r} & 3 & -4 & 2 & -1 \\ & & & & \\ 1 & & 3 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & -1 & 1 & /\!/ \end{array}$$

e si può scrivere

$$P(x) = (3x^2 - x + 1)(x - 1).$$

Ma perché la tabella funziona? Non è difficile da capire, basta seguirne i passi. Partiamo dalla scomposizione

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 &= (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0)(x - c) \\ &= b_{n-1}x^n + (-cb_{n-1} + b_{n-2})x^{n-1} + \ldots + (-cb_1 + b_0)x - cb_0 \end{aligned}$$

e uguagliamo i coefficienti del primo e dell'ultimo membro (principio di identità dei polinomi)

$$\begin{aligned} &b_{n-1} = a_n \\ &b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1} = a_{n-1} + ca_n \\ &\ldots \\ &b_0 = a_1 + cb_1 \\ &a_0 = -cb_0 \Rightarrow a_0 + cb_0 = 0. \end{aligned}$$

Le uguaglianze precedenti derivano anche dal solito algoritmo (regola di Ruffini) schematizzato dalla tabella

$$\begin{array}{c|rrrrr|r} & a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ c & & ca_n & \ldots & \ldots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & a_n & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 & /\!/ \end{array}$$