Osservazioni sull'assioma di scelta

Riccardo Dossena

27 febbraio 2016

1 Introduzione

Anche se la matematica non si può certamente ridurre alla pratica dimostrativa, non c'è dubbio che quest'ultima ne costituisca comunque una parte fondamentale. I ragionamenti che fanno da sfondo alle dimostrazioni dei teoremi, i principi e le tecniche a cui ci si riferisce quando si eseguono i passaggi sono quelli della logica classica, che non è innata, ma si acquisisce man mano che le dimostrazioni vengono viste, imparate, affrontate, imitate. In questo modo si apprendono le tecniche di dimostrazione (per assurdo, per induzione, ecc.) e nel corso di esse si fanno assunzioni e successive "deduzioni", lungo un percorso che porta dalle premesse alle conclusioni. Le regole logiche che intervengono diventano progressivamente così naturali da poter essere usate in seguito, giustamente, in modo quasi automatico. Tuttavia, è interessante soffermarsi e riflettere su alcune di esse, facendosi guidare non dalla logica intuitiva, bensì da quella formale.

In diversi teoremi che si incontrano fin dal primo anno del corso di laurea in matematica interviene un principio, detto *assioma di scelta*, che spesso passa inosservato perché sembra far parte di quella logica "naturale" che guida i procedimenti dimostrativi, tant'è che anche eminenti matematici del passato ne hanno fatto a volte uso inconsapevolmente[1]. Eppure questo principio, investendo quasi tutti i rami della matematica, ha molte conseguenze importanti, alcune vicine all'intuizione, altre decisamente distanti se non addirittura paradossali.

Nella prima parte di questo articolo proporremo, attraverso qualche esempio, un'analisi dell'assioma di scelta in relazione alla sua applicazione più o meno esplicita e alla sua effettiva necessità; nel seguito approfondiremo alcuni aspetti tecnici che riguardano le sue conseguenze e i suoi rapporti con gli altri assiomi della teoria degli insiemi. L'enunciato, a cui faremo riferimento nel seguito con la sigla **AC** (*Axiom of Choice*), è il seguente.

Assioma di scelta (AC). *Data una famiglia di insiemi non vuoti, esiste una funzione f che ad ogni insieme S della famiglia associa un elemento di S, cioè tale che $f(S) \in S$.*

In pratica, l'assioma afferma che è possibile *scegliere* tramite f (che chiamiamo una *funzione di scelta*) un elemento da ogni singolo insieme della famiglia.

L'assioma di scelta venne enunciato esplicitamente nel 1904 da E. Zermelo (1871–1953) per dimostrare il *principio del buon ordinamento*, che afferma che un insieme qualsiasi può essere *bene ordinato*, cioè ammette sempre una relazione d'ordine per la quale ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo[2].

[1] Ad esempio G. Cantor (1845–1918) e R. Dedekind (1831–1916), ma anche E. Borel (1871–1956), R. Baire (1874–1932) e H. L. Lebesgue (1875–1941). Questi ultimi, paradossalmente, erano contrari al suo utilizzo. Altri illustri esempi si possono trovare in C. F. Gauss (1777–1855) e A. L. Cauchy (1789–1857). Si vedano [3, p. 82 ss.] e [22, p. 121 ss.].

[2] Ad esempio $\mathbb{N}$ con l'ordinamento usuale è bene ordinato, mentre $\mathbb{R}$, sempre con l'ordinamento usuale, non lo è. Questa nozione è molto importante e anche noi ne faremo uso nel corso della nostra esposizione.

Il problema che emerse subito riguardava il carattere esistenziale di **AC**: esso, infatti, afferma unicamente l'*esistenza* di una funzione di scelta e non fornisce alcun metodo effettivo per costruirla. Questa peculiarità viene trasferita di conseguenza al principio del buon ordinamento che, per quanto affermi la possibilità di buoni ordini per insiemi particolari come quello dei numeri reali, non consente di esibire nemmeno un rappresentante di ciò di cui proclama l'esistenza. Tale questione pose l'assioma di scelta al centro di una accesa polemica che portò al suo rifiuto da parte di diversi membri autorevoli della comunità matematica[3].

Attualmente queste polemiche sono superate e l'assioma di scelta è entrato a far parte della logica che sottende l'ordinario ragionamento matematico[4].

Anche la nostra trattazione, nella quale distingueremo casi in cui **AC** è veramente necessario da altri in cui è evitabile, è condotta nello stesso spirito: non ha nulla a che vedere con problemi legati all'accettazione dell'assioma, ma, per dirla come G. Lolli [21, p. 128, n. 39], è unicamente ispirata da genuino interesse matematico.

2 Primi esempi

Chiariamo con alcuni semplici esempi come viene applicato l'assioma di scelta.

a) Consideriamo l'insieme di tutti gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. Per scegliere un punto da ogni intervallo si può usare la funzione f che associa ad ogni intervallo $[a, b]$ il suo punto medio, cioè tale che $f([a, b]) = (a + b)/2$: f è una funzione di scelta data in modo esplicito senza ricorrere ad **AC**; se consideriamo invece la famiglia di *tutti* i sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, per scegliere un elemento da ognuno di essi è necessario **AC**, non essendo definibile esplicitamente alcun procedimento di scelta (dunque alcuna funzione di scelta).

b) Il prossimo esempio è dovuto a Bertrand Russell (1872–1970) [31, p. 126]. Consideriamo una collezione infinita di paia di scarpe. Per scegliere una scarpa da ogni paio non è necessario ricorrere ad **AC**: infatti, una funzione di scelta potrebbe essere quella che associa ad ogni paio la scarpa destra; consideriamo invece una collezione infinita di paia di calze. Per scegliere una calza da ogni paio bisogna ricorrere ad **AC**: essendo le due calze di ciascun paio "indistinguibili" dal punto di vista della scelta, non è possibile fornire un procedimento che discrimini una calza rispetto all'altra.

3 La scelta da un singolo insieme non vuoto

Iniziamo affrontando una questione che a prima vista potrebbe apparire scontata, ma che in realtà merita qualche osservazione più approfondita.

---

[3] Basti ricordare quanto scrisse G. Peano (1858–1932) in un articolo del 1890:

> "Ma dato che non si può applicare un'infinità di volte una legge *arbitraria* mediante la quale ad una classe a si fa corrispondere un individuo di questa classe, abbiamo costruito una legge *determinata* con la quale a ciascuna classe a, sotto ipotesi opportune, si fa corrispondere un individuo di questa classe." (cit. da [3, p. 85])

Sebbene queste parole siano state scritte prima della formulazione dell'assioma di scelta, anche in seguito Peano mostrò sempre un atteggiamento di rifiuto nei confronti di esso. Per ulteriori approfondimenti su questi temi storici rimandiamo ai già citati [3, 22] e a [19, p. 56 ss.].

[4] Fanno eccezione, naturalmente, alcuni studi logici specifici in cui l'uso dell'assioma di scelta non è permesso al fine della creazione di particolari teorie matematiche, molto diverse da quella classica. Ad esempio la *Smooth Infinitesimal Analysis* [2] si basa sulla logica intuizionistica (formalizzata), che non ammette l'assioma di scelta.

Quando, all'interno di una dimostrazione, siamo a conoscenza del fatto che un insieme non è vuoto, è naturale considerare un suo elemento (un rappresentante) e usarlo per ragionamenti successivi. Si voglia ad esempio dimostrare la semplice proposizione: *se una successione di numeri reali positivi è superiormente limitata, lo è anche la successione dei suoi quadrati*. Possiamo ragionare così: data la successione $\{a_n\}$, consideriamo un suo maggiorante M. Allora, per ogni n si ha $0 \leqslant a_n \leqslant M$, da cui segue $a_n^2 \leqslant M^2$, ovvero $\{a_n^2\}$ è superiormente limitata. Di fatto, quando abbiamo considerato M, abbiamo operato una scelta dall'insieme non vuoto e infinito dei maggioranti della successione.

Dato un insieme A non vuoto (finito o infinito), ci chiediamo allora se per scegliere un elemento da A è necessario ricorrere ad **AC**. In caso contrario, dovremmo dimostrare in un altro modo l'esistenza di una funzione di scelta. Si noti come l'obiettivo della nostra ricerca riguardi esclusivamente l'*esistenza* di una funzione di scelta e non la sua esibizione, esattamente come seguirebbe dall'applicazione dell'assioma di scelta stesso, il quale non fornirebbe comunque informazioni precise sull'identità dell'individuo scelto.

Similmente, quando diciamo di un insieme che non è vuoto, affermiamo unicamente l'*esistenza* di un elemento appartenente a tale insieme, senza necessariamente esibirlo o costruirlo. Esso può essere nominato (quindi scelto) e usato per ragionamenti successivi, senza tener conto di altre sue caratteristiche che non siano relative all'appartenenza a quell'insieme, per poi di fatto sparire dal discorso[5].

Dunque, dato un insieme A non vuoto, esiste un suo elemento: chiamiamolo c. Ebbene, la funzione $f\colon \{A\} \to A$ definita da $f(A) = c$ è una funzione di scelta, e per attestarne l'esistenza non è stato necessario ricorrere ad **AC**, ma solo applicare ordinarie regole logiche. In conclusione, la scelta di un elemento da un singolo insieme non vuoto è possibile grazie alle regole della logica classica che fa da sfondo al ragionamento matematico, la quale non presuppone di per sé l'assioma di scelta[6].

4 La scelta da una famiglia finita di insiemi non vuoti

Ciò che abbiamo visto nella sezione precedente si può estendere a una collezione finita di insiemi non vuoti: anche in questo caso si può dimostrare l'esistenza di una funzione di scelta senza ricorrere ad **AC**. La dimostrazione procede per induzione.

Sia n il numero degli insiemi della famiglia. Se $n = 1$, sappiamo che esiste una funzione di scelta. Per $n > 1$ qualsiasi, consideriamo la collezione di insiemi non vuoti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e dimostriamo che l'esistenza di una funzione di scelta per $n - 1$ insiemi permette di definirne una anche per n insiemi. Siano $f^{(n-1)}$ una funzione di scelta per gli $n-1$ insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ e c un elemento

[5]Nel nostro esempio, quando concludiamo che $\{a_n^2\}$ è superiormente limitata, facciamo uscire di scena l'elemento M. Si tratta di una regola logica che prende il nome di *eliminazione del quantificatore esistenziale*: dalla premessa $\exists x\, A(x)$ segue la possibilità di denotare, ad esempio col simbolo c, un certo individuo dell'universo del discorso che soddisfi il predicato $A(x)$ e che funga da rappresentante, e fare quindi l'assunzione momentanea $A(c)$. Se da $A(c)$ si può dedurre una formula, allora questa è *conseguenza logica* di $\exists x\, A(x)$ (e c non gioca più alcun ruolo). Se $A(x)$ sta per "$x \in A$", da $\exists x \in A$ si può proseguire assumendo che c sia un elemento tale che $c \in A$. In altre parole, dal fatto che A è non vuoto si può passare alla familiare locuzione "sia c un suo elemento", coinvolgere c nel successivo ragionamento e arrivare a una conclusione in cui c non compare più. Situazioni di questo tipo capitano sovente nelle dimostrazioni matematiche. Ancora un esempio: dati $p, q, r \in \mathbb{N}$, se p è multiplo di q e q è multiplo di r, allora p è multiplo di r. Dimostriamolo: siano $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tali che $p = c_1 q$ e $q = c_2 r$. Allora $p = c_1 c_2 r$, cioè p è multiplo di r. Come si vede, c_1 e c_2, sebbene siano stati usati nel corso della dimostrazione, non fanno parte della conclusione "p è multiplo di r". Per una bella e chiara esposizione di questi aspetti si veda [23, p. 120 ss.].

[6]Per sgombrare il campo da possibili equivoci, osserviamo che un'eventuale applicazione dell'assioma di scelta sarebbe stata comunque lecita e avrebbe portato alla stessa conclusione, cioè all'esistenza di una funzione di scelta: semplicemente, non sarebbe stata necessaria.

dell'n-esimo insieme A_n. La funzione $f^{(n)}\colon \{A_1, \dots, A_n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ definita da

$$f^{(n)}(A_i) = \begin{cases} f^{(n-1)}(A_i) & \text{se } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ c & \text{se } i = n \end{cases}$$

è anch'essa una funzione di scelta, la cui esistenza è affermata senza far ricorso ad **AC**.

Dunque, le situazioni che potrebbero richiedere un intervento indispensabile di **AC** sono quelle in cui devono essere eseguite *infinite* scelte simultanee, senza che sia possibile esibire esplicitamente una funzione di scelta.

5 L'esempio del teorema di Weierstrass

In molti teoremi di analisi si fa uso dell'assioma di scelta. In alcuni casi tale uso è essenziale, in altri può essere evitato risistemando la dimostrazione. L'esempio che proponiamo di seguito, che ricade nel secondo caso, è tratto da [9, p. 433 s.] (con qualche modifica, per adattarlo meglio al nostro discorso).

Teorema di Weierstrass. *Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato I: cerchiamone ad esempio il minimo.

Detto $\lambda = \inf f(I)$, dobbiamo provare che λ è finito e che è uno dei valori assunti da f. Per questo introduciamo una *successione minimizzante*, cioè una successione $\{x_n\}$ a valori in I tale che $\{f(x_n)\}$ tende a λ, costruita nel modo seguente.

a) Se $\lambda = -\infty$, possiamo *scegliere* $x_n \in f^{-1}(]-\infty, -n])$ (che non è vuoto per definizione di estremo inferiore), dunque $-\infty < f(x_n) \leqslant -n$ da cui $f(x_n) \to -\infty$ per $n \to +\infty$;

b) se $\lambda \in \mathbb{R}$, possiamo *scegliere* $x_n \in f^{-1}\left(\left]\lambda, \lambda + \frac{1}{n}\right]\right)$, dunque $\lambda < f(x_n) \leqslant \lambda + \frac{1}{n}$ da cui $f(x_n) \to \lambda$ per $n \to +\infty$.

Siccome I è limitato, anche la successione $\{x_n\}$ lo è, per cui possiamo estrarre da essa una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$[7]. Sia c il suo limite: siccome I è anche chiuso, c appartiene a I.

Verifichiamo che c è proprio il punto di minimo che stiamo cercando. Abbiamo infatti, usando l'ipotesi di continuità, che implica la continuità in c,

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$$

e d'altra parte

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lambda.$$

Dunque $\lambda = f(c)$, cioè λ è finito e appartiene all'immagine $f(I)$. □

Questa dimostrazione, proposta in diversi manuali di analisi, fa uso dell'assioma di scelta perché nella definizione della successione minimizzante non viene indicato alcun metodo per operare effettivamente la scelta dagli insiemi $f^{-1}\left(\left]\lambda, \lambda + \frac{1}{n}\right]\right)$ e $f^{-1}(]-\infty, -n])$, di cui si sa solamente

[7] In questo passaggio viene applicato il teorema di Bolzano-Weierstrass nella forma *"da ogni successione reale limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente"*, che non richiede **AC**.

che non sono vuoti. Se avessimo la certezza che sono intervalli, potremmo costruire una funzione di scelta che associa ad ogni intervallo ad esempio il suo punto medio. Tuttavia, in generale questi insiemi non sono intervalli, ma possono essere addirittura unioni di infiniti intervalli[8].

In realtà possiamo trovare un modo per costruire una funzione di scelta che fa al caso nostro. Ciò è possibile grazie alle proprietà topologiche di $\mathbb{R}$, che è uno spazio *separabile*, ovvero contiene un sottoinsieme numerabile e denso: l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. La densità di $\mathbb{Q}$ comporta che ogni insieme aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contenga almeno un numero razionale. Ora, un intervallo semiaperto $]a, b]$ con $a < b$ si può scrivere come $]a, b[\cup\{b\}$ e d'altra parte si ha

$$f^{-1}(]a, b]) = f^{-1}(]a, b[\cup\{b\}) = f^{-1}(]a, b[) \cup f^{-1}(\{b\}).$$

Dato che f è continua, l'insieme $f^{-1}(]a, b[)$ è aperto per cui, se non è vuoto, contiene almeno un razionale. Quanto detto vale anche per $a = -\infty$. Quindi, possiamo affermare che ogni insieme del tipo $f^{-1}\left(\left]\lambda, \lambda + \frac{1}{n}\right]\right)$ oppure $f^{-1}(]-\infty, -n])$ contiene certamente un elemento di $\mathbb{Q}$.

Consideriamo una enumerazione $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Possiamo costruire la funzione di scelta che determina gli elementi x_n della successione minimizzante nel seguente modo:

a) se $\lambda = -\infty$, allora $x_n = \alpha(i_n)$, dove $i_n = \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid \alpha(j) \in f^{-1}(]-\infty, -n])\right\}$;

b) se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $x_n = \alpha(i_n)$, dove $i_n = \min\left\{j \in \mathbb{N} \,\middle|\, \alpha(j) \in f^{-1}\left(\left]\lambda, \lambda + \frac{1}{n}\right]\right)\right\}$.

La definizione è ben posta perché gli insiemi di cui consideriamo il minimo sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{N}$, che è bene ordinato (cioè, lo ricordiamo, è tale che ogni suo sottoinsieme non vuoto ha minimo).

In questo modo il teorema di Weierstrass è stato svincolato dall'assioma di scelta, a costo però di qualche complicazione in più.

Il metodo precedente si può generalizzare e formalizzare nel seguente teorema[9].

Teorema 5.1. *Siano X uno spazio topologico separabile e $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti non vuoti di X. Allora si può costruire una successione $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $x_i \in A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, senza ricorrere ad* ***AC****.*

Dimostrazione. Sia $D \subseteq X$ numerabile e denso e sia $\alpha\colon \mathbb{N} \to D$ una enumerazione (funzione biettiva). Definiamo

$$k_i = \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid \alpha(j) \in A_i\right\}$$

e poniamo

$$x_i = \alpha(k_i). \qquad \square$$

Potrebbe sorgere il dubbio che **AC** sia in qualche modo coinvolto nella scelta della particolare enumerazione di D fra le infinite disponibili. La risposta è negativa: si ricordi che la scelta di un elemento da un singolo insieme non vuoto è semplicemente una proprietà della logica sottostante il ragionamento matematico, come abbiamo discusso nella sezione 3.

[8] Si consideri la controimmagine di $]1, 4]$ della semplice funzione x^2, che è $[-2, -1[\cup]1, 2]$, oppure la controimmagine di $]0, 1]$ della funzione

$$\begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

che è l'unione di infiniti intervalli.

[9] Si veda la discussione http://www.matematicamente.it/forum/assioma-della-scelta-e-continuita-t40255.html. Ultimo controllo: 27-02-2016.

6 L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili

Consideriamo il ben noto teorema seguente e analizziamone la dimostrazione.

Teorema 6.1. *L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ l'unione numerabile degli insiemi numerabili X_n. Supponiamo, senza perdita di generalità, che gli insiemi X_n siano tutti disgiunti fra loro. Enumeriamo ogni X_n

$$X_n = \{x_n^i \mid i \in \mathbb{N}\} \Rightarrow x_n^0, x_n^1, x_n^2, \dots$$

e costruiamo una nuova enumerazione $\alpha\colon \mathbb{N} \to X$ attraverso lo schema seguente

$$\begin{tikzcd}
x_0^0 \arrow[d] & x_0^1 \arrow[r] & x_0^2 \arrow[dl] & x_0^3 \arrow[r] & x_0^4 \arrow[dl] & \cdots \\
x_1^0 \arrow[ur] & x_1^1 \arrow[dl] & x_1^2 \arrow[ur] & x_1^3 \arrow[dl] & x_1^4 & \cdots \\
x_2^0 \arrow[d] & x_2^1 \arrow[ur] & x_2^2 \arrow[dl, dashed] & x_2^3 & x_2^4 & \cdots \\
x_3^0 \arrow[ur] & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

in cui $\alpha(0) = x_0^0$, $\alpha(1) = x_1^0$, $\alpha(2) = x_0^1$, $\alpha(3) = x_0^2$, ecc. Esplicitamente, la funzione

$$\alpha^{-1}(x_n^i) = \frac{1}{2}(n+i)(n+i+1) + \begin{cases} n & \text{se } n+i \text{ è pari} \\ i & \text{se } n+i \text{ è dispari} \end{cases}$$

assegna all'elemento $x_n^i \in X$ il suo posto (contato a partire da 0) nell'enumerazione. □

In questa dimostrazione, anche se un po' di nascosto, è intervenuto **AC**. Infatti, quando abbiamo enumerato gli insiemi X_n abbiamo effettuato una scelta simultanea dalla famiglia (infinita) degli insiemi non vuoti delle enumerazioni degli X_n, assegnandone una ad ogni X_n. Dire che X_n è *numerabile* è diverso dal dire che X_n è *enumerato*: quest'ultima affermazione equivale a fornire, insieme a X_n, una sua enumerazione tra le infinite possibili.

Contrariamente a quanto accaduto per il teorema di Weierstrass, il ricorso ad **AC** qui è inevitabile: è possibile infatti costruire dei modelli in cui, assumendo la non validità dell'assioma di scelta, $\mathbb{R}$ risulta unione numerabile di insiemi numerabili (si vedano [5, p. 144 ss.], [13, p. 77], [15, p. 142, Th. 10.6] e il modello M9 di Feferman-Levy in [14, p. 153 s.]).

7 Lo strano caso delle funzioni sequenzialmente continue

Definizione 7.1. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f si dice sequenzialmente continua in $c \in \mathbb{R}$ se, per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a c, si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(c).$$

Il prossimo importante teorema sancisce l'equivalenza fra l'ordinaria nozione di continuità e quella sequenziale.

Teorema 7.2. *Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in c se e solo se è sequenzialmente continua in c.*

Dimostrazione. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in c e $x_n \to c$. Per continuità, dato un intorno I di $f(c)$, esiste un intorno J di c tale che, per ogni $x \in J$, $f(x) \in I$. Ma J contiene tutti gli elementi della successione $\{x_n\}$ da un certo indice m in poi, per cui in particolare $f(x_n) \in I$ per ogni $n \geqslant m$, ovvero $f(x_n)$ converge a $f(c)$.

Viceversa, sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sequenzialmente continua in c. Supponiamo che f non sia continua in c e fissiamo un intorno I di $f(c)$ tale che, per ogni intorno J di c, esista almeno un punto la cui immagine non appartenga a I. Consideriamo dunque la successione di intorni di c

$$J_n = \left]c - \tfrac{1}{n}, c + \tfrac{1}{n}\right[$$

e *scegliamo* in ciascuno di essi un elemento $x_n \in J_n$ tale che $f(x_n) \notin I$. Questa successione converge a c, ma $f(x_n) \nrightarrow f(c)$, in contraddizione con la continuità sequenziale di f. □

In questa dimostrazione **AC** viene usato solo nella seconda parte per effettuare una scelta infinita simultanea da ogni J_n. Anche qui il ricorso ad **AC** è inevitabile: è possibile infatti costruire modelli in cui, venendo meno l'assioma di scelta, esistono funzioni sequenzialmente continue in qualche punto c e tuttavia *non* continue nello stesso c (si vedano [13, p. 73] e [15, p. 142, Cor. 10.3]). Dunque l'enunciato

una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sequenzialmente continua in x è anche continua in x

non vale senza **AC**.

Eppure, se consideriamo la continuità *globale* (cioè per tutti i punti del dominio $\mathbb{R}$), le nozioni di continuità e di continuità sequenziale continuano a coincidere, anche senza l'assioma di scelta. La dimostrazione del teorema precedente andrà però completamente modificata nella seconda parte. Ci occorre un lemma.

Lemma 7.3. *Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sequenzialmente continua in $c \in \mathbb{R}$, allora $f|_{\mathbb{Q}\cup\{c\}}$ è continua in c.*

Dimostrazione. Enumeriamo $\mathbb{Q}$ tramite una biiezione $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Detto $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{Q}$, possiamo costruire, senza l'uso di **AC**, una funzione di scelta $\sigma\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q})\backslash\{\varnothing\} \to \mathbb{Q}$ definita da

$$\sigma(A) = \alpha(n_0) \quad \text{dove} \quad n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) \in A\}$$

come nella dimostrazione del teorema 5.1.

Supponiamo che $f|_{\mathbb{Q}\cup\{c\}}$ non sia continua in c. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, esiste $y \in \mathbb{Q}$ tale che $|c - y| < \frac{1}{n}$ e $|f(c) - f(y)| > \varepsilon$. Definiamo la successione seguente:

$$y_n = \sigma\Big(\Big\{y \in \mathbb{Q} \;\Big|\; |c - y| < \tfrac{1}{n} \wedge \Big|f(c) - f(y)\Big| > \varepsilon\Big\}\Big).$$

La successione $\{y_n\}$ è tale che $y_n \to c$, ma $f(y_n)$ *non* converge a $f(c)$, contro l'ipotesi. □

Teorema 7.4. *Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è (globalmente) continua se e solo se è (globalmente) sequenzialmente continua.*

Dimostrazione. Se f è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$, segue dalla prima parte della dimostrazione del teorema 7.2, che non faceva ricorso ad **AC**, che f è pure sequenzialmente continua in ogni $x \in \mathbb{R}$.

Viceversa, sia f sequenzialmente continua in ogni x. Dobbiamo dimostrare che, dato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, f è continua in x, vale a dire

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_x > 0\ :\ \forall y \in \mathbb{R}\ \Big(|x - y| < \delta_x \ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon\Big).$$

Dal lemma 7.3 segue che la restrizione di f a $\mathbb{Q} \cup \{x\}$ è continua in $x \in \mathbb{R}$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_x > 0$ tale che, per ogni z

$$(z \in \mathbb{Q})\ \wedge\ (|x - z| < \delta_x)\ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(z)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia ora $y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta_x$. Dato che la restrizione di f a $\mathbb{Q} \cup \{y\}$ è anch'essa continua[10], esiste $\delta_y > 0$ tale che, per ogni z

$$(z \in \mathbb{Q})\ \wedge\ (|y - z| < \delta_y)\ \Rightarrow\ \big|f(y) - f(z)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo ora l'insieme $A_y = \{z \in \mathbb{Q} \mid |z - y| < \delta_y\ \wedge\ |z - x| < \delta_x\}$, che non è vuoto dal momento che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Allora, ponendo $z_y = \sigma(A_y)$, si ha

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|f(x) - f(z_y)\big| + \big|f(z_y) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

La dimostrazione precedente, che non fa uso di **AC**, è tratta da [13, p. 30] e da [32] (quest'ultimo con maggiori dettagli).

Seguendo il suggerimento di Sleziak [32], questa dimostrazione potrebbe essere adattabile al caso di funzioni $f\colon X \to Y$ in cui Y è uno spazio metrico e X uno spazio topologico separabile che soddisfa il primo assioma di numerabilità (cioè tale che ogni punto ammette una base numerabile di intorni), in particolare uno spazio metrico.

8 Finito e infinito

Intuitivamente, un insieme è finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che esso abbia n elementi. Il concetto di *numero cardinale* (o *cardinalità* o *potenza*) traduce in modo preciso questa idea: un insieme A ha numero cardinale n, e si scrive $|A| = n$ oppure $\operatorname{card}(A) = n$, se è in corrispondenza biunivoca con uno degli insiemi $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, che possiamo quindi considerare i "prototipi" degli insiemi finiti (con $\mathbb{N}_0 = \varnothing$). Diamo allora la seguente

Definizione 8.1. *Un insieme A si dice finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|A| = n$. Un insieme si dice infinito se non è finito.*

Teorema 8.2. *Se $m > n$, non esiste una funzione iniettiva di $\mathbb{N}_m$ in $\mathbb{N}_n$.*

Questo teorema si dimostra in modo tutt'altro che banale (si veda [21, p. 38 ss.]), ma diventa tutto sommato intuitivo se riformulato come il seguente

Principio dei cassetti. *Non è possibile mettere m oggetti in $n < m$ cassetti senza che almeno un cassetto ne contenga almeno due.*

[10] Si noti che è proprio qui che si sfrutta il fatto che la continuità sequenziale valga globalmente, cioè *per ogni* y.

Da questo principio possiamo dedurre che *un insieme finito non può essere equipotente ad una sua parte propria*.

Si pensi ora all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e all'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari. Ovviamente $\mathbb{P}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e la funzione biettiva $f(n) = 2n$ associa ad ogni numero naturale un numero pari. L'insieme $\mathbb{N}$ (infinito) è dunque equipotente ad una sua parte propria, contrariamente a quanto accade per un insieme finito. Questo fatto suggerisce la definizione seguente.

Definizione 8.3. *Un insieme si dice infinito secondo Dedekind (o più semplicemente D-infinito) se è equipotente a un suo sottoinsieme proprio. Un insieme si dice D-finito se non è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.*

Abbiamo a disposizione dunque due diverse nozioni di insieme finito-infinito: quella, forse più immediata, che abbiamo dato all'inizio di questa sezione e quella secondo Dedekind[11]. Dal principio dei cassetti segue immediatamente che *un insieme D-infinito è infinito.*

È naturale chiedersi se vale anche il viceversa, cosa che attesterebbe l'equivalenza delle due nozioni. La risposta è affermativa, ma l'inverso dipende in modo essenziale dall'assioma di scelta.

Cominciamo enunciando il teorema seguente, di cui proponiamo due dimostrazioni: una intuitiva e una rigorosa. La prima è molto più semplice e chiarisce l'idea alla base della seconda, ma il motivo principale per cui le proponiamo insieme è che crediamo siano bellissime entrambe.

Teorema 8.4. *Ogni insieme infinito possiede un sottoinsieme numerabile.*

Dimostrazione intuitiva. Sia X un insieme infinito. Possiamo scegliere un elemento da esso e denotarlo con g_0; scegliamo poi un elemento da $X \backslash \{g_0\}$ e denotiamolo con g_1; scegliamo poi g_2 da $X \backslash \{g_0, g_1\}$ e così via. Il sottoinsieme $\{g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ di X è numerabile. □

Dimostrazione rigorosa. Sia X un insieme infinito. Dobbiamo costruire una funzione $g\colon \mathbb{N} \to X$ iniettiva. Sia $f\colon \mathcal{P}(X) \backslash \{\varnothing\} \to X$ una funzione di scelta. Definiamo $g\colon \mathbb{N} \to X$ nel seguente modo[12]

$$g(n) = \begin{cases} f(X) & \text{se } n = 0 \\ f(X \backslash \{g(0), \ldots, g(n-1)\}) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Dato che X è infinito, $X \backslash \{g(0), \ldots, g(n-1)\}$ è non vuoto per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostriamo che g è iniettiva. Siano $r, s \in \mathbb{N}$ con $r \neq s$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che sia $r < s$. Allora $g(r) \in \{g(0), \ldots, g(r), \ldots, g(s-1)\}$, ma $g(s) \in X \backslash \{g(0), \ldots, g(r), \ldots, g(s-1)\}$, quindi $g(r) \neq g(s)$.

L'insieme immagine $g(\mathbb{N})$ è un sottoinsieme numerabile di X. □

Nella prima dimostrazione abbiamo fatto ricorso ad **AC** operando scelte *in successione*, in cui ciascuna scelta dipende dalle precedenti. Per completare tale processo occorrerebbe però un tempo infinito. Come suggerito da A. Fraenkel (1891–1965), "questo procedimento è abbastanza grossolano, perché il fattore tempo sembra essere rilevante. Un procedimento preferibile potrebbe essere quello di fare tutte le scelte *simultaneamente* e indipendentemente l'una dall'altra" [8, p. 41]. In effetti, la nostra impostazione logico-assiomatica non rende accettabile il primo metodo di scelta,

[11] Seguendo l'impostazione di [8] e [19], un insieme con cardinalità $n \in \mathbb{N}$ si dice *induttivo*. Così, per distinguere le due nozioni di insieme infinito, si parla di insieme *non induttivo* per intendere la prima e di insieme *riflessivo* per riferirsi alla D-infinità. Segnaliamo tuttavia che in letteratura il termine induttivo può riferirsi anche a un insieme A con la seguente proprietà: $\varnothing \in A$ e per ogni a, se $a \in A$, allora anche $a \cup \{a\} \in A$ (si veda [4, p. 81]). In [19] un tale insieme, che è infinito, viene detto *ereditario*.

[12] La legittimità di questa definizione è sancita dal *teorema di ricorsione*, la cui dimostrazione può essere reperita in qualsiasi libro di teoria degli insiemi. Segnaliamo ad esempio [1, pp. 387 ss.], [11, pp. 89 ss.], [19, pp. 115 ss.] e [33, p. 77].

ma rende assolutamente lecito quello della seconda dimostrazione che, pur riadattato, rimane nello stesso spirito del primo.

Il ricorso all'assioma di scelta è comunque indispensabile. Infatti, se questo viene meno, è possibile costruire modelli in cui esiste un insieme infinito che non contiene alcun sottoinsieme numerabile [5, p. 139]. Il prossimo teorema afferma finalmente l'equivalenza tra le due nozioni di insieme infinito.

Teorema 8.5. *Ogni insieme infinito è D-infinito, cioè è equipotente a un suo sottoinsieme proprio.*

Dimostrazione. Detto X un insieme infinito, si consideri un suo sottoinsieme numerabile $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, la cui esistenza segue dal teorema precedente. Siano $A = X \backslash B$, quindi $X = A \cup B$ e $B' = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Allora $Y = B' \cup A$ è un sottoinsieme proprio di X (dato che $b_0 \notin Y$) e la funzione $f\colon X \to Y$ definita da

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{se } x \in A \\ f(b_n) = b_{n+1} & \text{se } b_n \in B \end{cases}$$

è una corrispondenza biunivoca. □

Anche se nella dimostrazione non è intervenuto direttamente **AC**, il teorema 8.5 dipende comunque da esso perché sfrutta in modo essenziale il fatto che un insieme infinito ha sempre un sottoinsieme numerabile. Se però ci riferiamo alla D-infinitezza, questa stessa proprietà caratterizza gli insiemi D-finiti senza dipendere da **AC**, come mostra il risultato seguente.

Teorema 8.6. *Un insieme è D-infinito se e solo se possiede un sottoinsieme numerabile.*

Dimostrazione. Sia X un insieme D-infinito. Allora esiste una funzione biettiva $f\colon X \to Y$, con $Y \subset X$ (sottoinsieme proprio). Scelto un elemento $y_0 \in X \backslash Y$, definiamo ricorsivamente l'applicazione $g\colon \mathbb{N} \to X$

$$g(n) = \begin{cases} y_0 & \text{se } n = 0 \\ f(g(n-1)) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

che risulta iniettiva. Infatti, se $n \neq m$ allora $g(n) \neq g(m)$. Supponiamo per assurdo che tale proprietà non valga. Sia allora n il *minimo* numero naturale per cui l'immagine attraverso g è uguale a quella di un suo predecessore, cioè tale che $g(n) = g(m)$ e $m < n$ (da cui $n \geqslant 1$). Anche $m \geqslant 1$, poiché se fosse $m = 0$ si avrebbe $g(m) = g(0) = y_0 \notin Y$ e $g(m)$ non potrebbe essere uguale a $g(n) \in Y$ per $n \geqslant 1$. Dunque, per come g è definita, $g(n) = f(g(n-1)) = g(m) = f(g(m-1))$, da cui segue $g(n-1) = g(m-1)$ per l'iniettività di f, contro l'ipotesi che n sia il più piccolo per cui valga l'uguaglianza.

Dunque $g(\mathbb{N}) = \{g(0), g(1), g(2), g(3), \ldots\}$ è un sottoinsieme numerabile di X.

Viceversa, per dimostrare che un insieme che possiede un sottoinsieme numerabile è D-infinito, basta ripetere la dimostrazione del teorema 8.5, la quale non dipende più da **AC** poiché la presenza di tale sottoinsieme è assunta per ipotesi. □

Dunque, nel modello citato [5, p. 139] in cui esiste un insieme infinito privo di sottoinsiemi numerabili, tale insieme non può essere D-infinito[13].

In conclusione, se vale l'assioma di scelta, le nozioni di insieme infinito e di insieme D-infinito (e quella di insieme finito e di insieme D-finito) coincidono; se invece l'assioma di scelta viene meno, la nozione di D-infinitezza è più forte e implica l'altra, ma non è da quest'ultima implicata.

L'approccio all'infinito secondo Dedekind ha il pregio di poter essere svolto indipendentemente dalla trattazione dei numeri naturali.

[13] Esiste cioè un insieme infinito D-finito. Si vedano anche [13, p. 46] e il modello M1 di Cohen in [14, p. 146].

9 Enunciati equivalenti all'assioma di scelta

In questa sezione mostreremo alcuni enunciati equivalenti all'assioma di scelta presenti nella letteratura. I primi sono sostanzialmente formulazioni alternative di **AC** non troppo lontane dall'originale; segue il lemma di Zorn, che fa parte dei cosiddetti *principi di massimalità*, che trova diverse applicazioni nelle dimostrazioni[14] e il cui legame con l'assioma di scelta non sembra essere così evidente; infine il principio del buon ordinamento, di cui proporremo una dimostrazione come applicazione diretta del lemma di Zorn.

9.1 Altre formulazioni di AC

AC2. *Data una famiglia di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un insieme B tale che, per ogni insieme Z della famiglia, $B \cap Z$ ha un solo elemento.*

L'insieme B viene detto un *insieme di scelta* per la famiglia. Si noti che questa formulazione, a differenza di **AC**, richiede che gli insiemi siano a due a due disgiunti. Questa condizione è in effetti necessaria: la famiglia $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ non ammette infatti alcun insieme di scelta.

Teorema 9.1. ***AC*** $\Leftrightarrow$ ***AC2***.

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Data una famiglia A di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, applicando **AC** troviamo una funzione f di scelta per A. L'insieme immagine $B = f(A)$ è un insieme di scelta per A.

$\Leftarrow$) Data una famiglia A di insiemi non vuoti, se questi sono a due a due disgiunti, applicando **AC2** troviamo un insieme B di scelta e possiamo costruire una funzione di scelta associando ad ogni insieme Z della famiglia l'unico elemento di $B \cap Z$. Se invece non sono disgiunti, possiamo considerare la famiglia A' formata da tutti gli insiemi $Z' = \{(z, Z) \mid z \in Z\}$, dove $Z \in A$. A' e A sono in corrispondenza biunivoca, ma gli elementi di A' sono disgiunti, per cui possiamo trovare un insieme di scelta B per A'. Costruiamo una funzione di scelta associando ad ogni $Z \in A$ la prima proiezione dell'unico elemento di $B \cap Z'$ (cioè l'elemento z della coppia (z, Z) scelta da B). □

Assioma moltiplicativo (AC3). *Data una famiglia di insiemi non vuoti $A = \{A_i\}_{i \in I}$, allora $\prod_{i \in I} A_i$ non è vuoto.*

Teorema 9.2. ***AC*** $\Leftrightarrow$ ***AC3***.

Dimostrazione. Ricordando che il *prodotto cartesiano generalizzato* è definito come

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f \colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I \ f(i) \in A_i \right\}$$

risulta evidente l'equivalenza dei due enunciati, poiché ad ogni elemento del prodotto cartesiano si può far corrispondere una funzione di scelta. □

9.2 Il lemma di Zorn e il principio del buon ordinamento

Il prossimo enunciato, formulato da Max Zorn (1906–1993) nel 1935, ma dovuto anche al lavoro di K. Kuratowski (1896–1980), richiede alcune nozioni preliminari che riportiamo di seguito.

Definizione 9.3. *Un insieme parzialmente ordinato è una coppia $(X, \leqslant)$ dove X è un insieme non vuoto e $\leqslant$ è una relazione binaria su X che soddisfa le seguenti proprietà:*

[14] Si veda ad esempio la dimostrazione classica del teorema di Hahn-Banach.

i) riflessività: $x \leqslant x$ per ogni $x \in X$;

ii) antisimmetria: se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, allora $x = y$;

iii) transitività: se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$, allora $x \leqslant z$.

Un sottoinsieme C di X è una catena se per ogni $x, y \in C$ o $x \leqslant y$ o $y \leqslant x$. Un elemento $x \in X$ è un maggiorante per l'insieme $B \subseteq X$ se $b \leqslant x$ per ogni $b \in B$. Un elemento $m \in X$ è massimale se, per tutti gli $x \in X$, $m \leqslant x$ implica $x = m$.

Lemma di Zorn. *Sia $(X, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato. Se ogni catena in X ha un maggiorante, allora X ha almeno un elemento massimale.*

Teorema 9.4. ***AC $\Rightarrow$ Lemma di Zorn.***

Idea della dimostrazione. Essendo X non vuoto, possiamo scegliere un suo elemento e denotarlo con x_0. Se x_0 è massimale, abbiamo finito. In caso contrario, l'insieme $\{x_0\}$, che è banalmente una catena, ha almeno un maggiorante: scegliamone uno e chiamiamolo x_1. Ancora, se x_1 è massimale abbiamo finito, altrimenti l'insieme $\{x_0 < x_1\}$, che ancora è una catena, ha un maggiorante x_2, e così via. Si può dimostrare che questo processo di costruzione della catena $\{x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\}$, iterato finché è possibile trovare maggioranti, conduce a un elemento massimale per l'insieme X. □

La dimostrazione completa del lemma di Zorn può essere trovata in diversi testi di teoria degli insiemi, come [1, 4, 6, 19, 25]. Segnaliamo tuttavia le belle dimostrazioni riportate in [7] e [11, cap. 16], che non richiedono conoscenze particolarmente approfondite della teoria.

Formalizziamo ora, per rendere il discorso completo, la nozione di insieme *bene ordinato*.

Definizione 9.5. *Un insieme totalmente ordinato $(X, \leqslant)$ si dice bene ordinato se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un minimo rispetto a $\leqslant$. In tal caso si dice che $\leqslant$ è un buon ordine (o un buon ordinamento) per X.*

Principio del buon ordinamento. *Ogni insieme ammette un buon ordinamento.*

Teorema 9.6. ***Lemma di Zorn $\Rightarrow$ Principio del buon ordinamento.***

Dimostrazione. Dato un insieme X, consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ di tutti i possibili buoni ordini $(B, \leqslant_B)$, con $B \subseteq X$, e definiamo su di essa la seguente relazione

$$(B, \leqslant_B) \preceq (B', \leqslant_{B'}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B \subseteq B' \\ \leqslant_{B'} \text{ ristretta a } B \text{ coincide con } \leqslant_B \\ \text{se } x \leqslant_{B'} b \text{ con } b \in B, \text{ allora anche } x \in B \end{array} \right\}.$$

In tal caso si dice che $(B, \leqslant_B)$ è un *segmento iniziale* di $(B', \leqslant_{B'})$. Si può verificare che $\preceq$ è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{B}$ e che ogni catena C di $\mathcal{B}$ ammette come maggiorante $\bigcup C$ (che è ancora un buon ordine). Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale $(B, \leqslant_B) \in \mathcal{B}$. Verifichiamo che è proprio $B = X$. In caso contrario, infatti, potremmo considerare un elemento $z \in X \backslash B$ e costruire un buon ordinamento sull'insieme $B \cup \{z\}$ come segue

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (x, y \in B \text{ e } x \leqslant_B y) \text{ oppure } y = z$$

(l'elemento z è posto "dopo" tutti gli elementi di B). Allora $(B \cup \{z\}, \leqslant)$ sarebbe un buon ordine con segmento iniziale $(B, \leqslant_B)$, che dunque non sarebbe massimale. □

Teorema 9.7. ***Principio del buon ordinamento*** $\Rightarrow$ ***AC***.

Dimostrazione. Dato un qualsiasi insieme X, esiste su di esso un buon ordinamento. Possiamo costruire una funzione di scelta $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$ che associa ad ogni sottoinsieme B di X il suo minimo secondo tale buon ordinamento, cioè tale che $f(B) = \min B$. □

Riassumiamo l'importante risultato della nostra discussione nel seguente corollario.

Corollario 9.8. *I seguenti enunciati sono equivalenti:*

1) *assioma di scelta;*

2) *lemma di Zorn;*

3) *principio del buon ordinamento.*

10 Alcune conseguenze dell'assioma di scelta

Riportiamo di seguito alcune fra le conseguenze dell'assioma di scelta. Per un elenco più completo e per maggiori dettagli rimandiamo ai più volte citati [13, 14, 19, 22].

1. Ogni insieme infinito è l'unione di un insieme di sottoinsiemi numerabili disgiunti.
2. Esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non misurabile secondo Lebesgue.
3. Ogni insieme infinito è D-infinito.
4. L'unione di un insieme numerabile di insiemi finiti è finito o numerabile.
5. L'unione di un insieme numerabile di insiemi numerabili è numerabile.
6. Se una funzione di variabile reale è sequenzialmente continua in un punto, è ivi continua.
7. Un sottospazio di uno spazio metrico separabile è separabile.
8. Ogni spazio vettoriale ammette una base.
9. *Principio della tricotomia.* Dati due insiemi qualunque A e B, o $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$ o $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$ o $\operatorname{card}(B) < \operatorname{card}(A)$[15].
10. *Teorema di compattezza.* Ogni insieme di proposizioni ammette una interpretazione se e solo se ogni sottoinsieme finito ne ammette una.
11. *Teorema di Hahn-Banach.* Sia E uno spazio vettoriale reale. Se $p\colon E \to \mathbb{R}$ è un'applicazione tale che, per ogni $x, y \in E$ e per ogni $\lambda > 0$, si ha $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ e $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$, e g un funzionale lineare su un sottospazio G di E tale che $g(x) \leqslant p(x)$ su G, allora esiste f lineare su E che estende g (cioè tale che $f(x) = g(x)$ su G) e per cui ancora $f(x) \leqslant p(x)$ su E.

[15] Si dice che due insiemi A e B hanno la stessa *cardinalità*, e si scrive $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B)$, se esiste una biiezione tra A e B; la cardinalità di A è minore o uguale di quella di B, $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$, se esiste una funzione iniettiva di A in B; la cardinalità di A è minore di quella di B, $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$, se $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$ ma non esiste una biiezione tra A e B. Il principio della tricotomia, che afferma che due insiemi sono sempre confrontabili rispetto alla cardinalità, è in realtà equivalente all'assioma di scelta [19, p. 140 s.].

12. *Teorema di Vitali.* Se μ è una misura a valori positivi o nulli definita su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, invariante per traslazioni, numerabilmente additiva e tale che la misura degli intervalli è la differenza degli estremi, allora esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui μ non è definita.

13. *Paradosso di Banach-Tarski.* Una sfera può essere decomposta in due sottoinsiemi disgiunti tali che la sfera è equidecomponibile con ciascuno dei due sottoinsiemi[16].

11 Risultati di indipendenza

Quasi tutti gli enti oggetto di studio dei matematici possono essere ricostruiti all'interno di una teoria degli insiemi. Questo fatto è alla base di un'impostazione di pensiero che prende il nome di *riduzionismo*, per cui ogni oggetto matematico viene ricondotto, come essenza, a un particolare insieme: le funzioni e le relazioni sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano; una coppia ordinata $\langle x, y\rangle$ può essere a sua volta definita come l'insieme $\{\{x\}, \{x, y\}\}$; i numeri naturali, a partire dai quali sono definibili gli altri numeri come classi di equivalenza, sono essi stessi insiemi $(0 = \varnothing, 1 = \{0\} = \{\varnothing\}, 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \ldots)$ e così via. Il matematico non deve riferirsi in continuazione a queste definizioni, ma avere solo presente le caratteristiche che derivano da esse. Ad esempio, delle coppie ordinate tutto quello che serve è che da $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si possa dedurre $a = c$ e $b = d$. Per chi non abbia opinioni particolari verso i fondamenti della matematica è difficile non aderire a questa impostazione, anche solo per il fatto che all'inizio dei percorsi di studio di algebra e analisi è proprio in questo modo che in genere vengono presentati gli enti matematici, salvo poi dimenticarsene per usarli in modi, giustamente, più diretti[17]. Così, un matematico all'opera si immerge implicitamente in un determinato contesto che di solito è una teoria degli insiemi, che egli pone più o meno consapevolmente alla base del suo lavoro[18].

La teoria degli insiemi più popolare è quella di Zermelo-Fraenkel, abbreviata con **ZF**, ma non è l'unica: alternative famose sono ad esempio le teorie di von Neumann-Bernays-Gödel (**NBG**) e di Mostowski-Kelley-Morse (**MKM**)[19].

Vogliamo completare la nostra trattazione dell'assioma di scelta fornendo alcune notizie sul suo rapporto con gli altri assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel, sebbene le stesse conclusioni valgano anche per le altre due teorie degli insiemi citate (si vedano [24, p. 248 s.] e [25, p. 39 s.]).

Per rendere più completa la nostra discussione, introduciamo un importante enunciato congetturato per la prima volta da G. Cantor nel 1873 e conosciuto col nome di *ipotesi del continuo* (Continuum Hypothesis). La sua rilevanza storica è notevole, tant'è che fu al primo posto dei 23 problemi che nel 1900 David Hilbert (1862–1943) propose come fondamentali per lo sviluppo della matematica del tempo [17].

[16] A si dice equidecomponibile con B se esistono due decomposizioni finite in sottoinsiemi disgiunti $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ tali che A_i è congruente a B_i per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per una trattazione esauriente del paradosso si rimanda a [15, p. 3 ss.], [19, p. 152 ss.] e [34].

[17] Per fare un esempio, l'immagine mentale che si ha di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di solito un grafico, o tutt'al più una corrispondenza tra due diagrammi di Venn congiunti da frecce. È difficile che si pensi a un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, anche se questa è la definizione originaria.

[18] Questo nostro discorso, tuttavia, è molto semplificato. La questione è delicata e sfocia in considerazioni di carattere filosofico, oltre che matematico, e non può certo ridursi a poche righe. Per fare solo un esempio, la *teoria delle categorie* è un'alternativa che può porsi anch'essa come fondamento del lavoro del matematico (si veda [16]). Per approfondimenti su questi temi si rimanda a [3], [21, cap. 2] e [20].

[19] Nella teoria di Zermelo-Fraenkel vengono considerati esclusivamente insiemi, mentre nelle altre due teorie, oltre al concetto di insieme, troviamo anche quello di *classe*. La teoria di Zermelo-Fraenkel è trattata nel dettaglio in [4, 6, 19, 21], la teoria di Mostowski-Kelley-Morse in [25] e quella di von Neumann-Bernays-Gödel in [24, cap. 4]. Per un'analisi dei rapporti fra le tre teorie si vedano [12, cap. 5] e [18].

Ipotesi del continuo (CH) (Prima formulazione)**.** *Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$.*

Esso afferma che non esistono cardinalità intermedie tra quella di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che non esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ più che numerabili ma non equipotenti a $\mathbb{R}$. Introducendo la notazione dei numeri cardinali mediante gli alef[20], ponendo $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ e indicando con $2^{\aleph_0}$ il numero cardinale di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, che è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, l'enunciato (in termini di numeri cardinali) diventa il seguente.

Ipotesi del continuo (CH) (Seconda formulazione)**.** *Non esiste alcun cardinale α tale che $\aleph_0 < \alpha < 2^{\aleph_0}$.*

Quella che segue è invece la generalizzazione (Generalized Continuum Hypothesis) proposta da F. Hausdorff (1868-1942) nel 1908.

Ipotesi generalizzata del continuo (GCH). *Per ogni cardinale λ, 2^λ è il minimo cardinale dopo λ.*

Il primo fatto importante che vale la pena di riportare è racchiuso nel teorema seguente, la cui dimostrazione può essere trovata in [5, p. 148 ss.].

Teorema 11.1 (Tarski-Lindenbaum-Sierpinski)**.** ***GCH*** $\Rightarrow$ ***AC***.

Nel seguito indicheremo più precisamente la teoria di Zermelo-Fraenkel senza assioma di scelta con **ZF**, mentre la stessa unita all'assioma (**ZF** + **AC**) verrà indicata con **ZFC**. Il prossimo importante risultato è dovuto al grande Kurt Gödel (1906–1978), annunciato nel 1938 e pubblicato con tutti i dettagli in una monografia del 1940 [10].

Teorema 11.2 (Gödel (1938))**.**

1. *Se **ZF** è coerente, allora da **ZF** non si può dedurre la negazione di **AC**;*
2. *se **ZF** è coerente, allora da **ZFC** non si può dedurre la negazione di **GCH**.*

Dato che **CH** è un caso particolare di **GCH**, da **ZFC** non si può dedurre la negazione di **CH**[21].

I risultati di Gödel mostrano che l'aggiunta dell'assioma di scelta agli altri assiomi di **ZF** è coerente, cioè non può portare di per sé a contraddizioni: se una contraddizione può essere dedotta da **ZFC**, allora una contraddizione deve essere già presente in **ZF**. Inoltre, anche aggiungendo l'ipotesi generalizzata del continuo, la teoria rimane coerente (se anche prima lo era).

D'altra parte, anche alla luce di questi importanti risultati, ci si può chiedere se l'assioma di scelta e l'ipotesi del continuo possano essere dedotti da **ZF**. La risposta, riassunta nel prossimo teorema, venne data nel 1963 da Paul J. Cohen (1934–2007).

Teorema 11.3 (Cohen (1963))**.**

1. *Se **ZF** è coerente, allora da **ZF** non si può dedurre **AC**;*
2. *se **ZF** è coerente, allora da **ZFC** non si può dedurre **CH**.*

[20] L'uso di tale notazione richiede **AC**. Infatti, per definizione gli alef ($\aleph$) sono i numeri cardinali degli insiemi ben ordinabili, che corrispondono a *tutti* gli insiemi se e solo se, appunto, vale l'assioma di scelta.

[21] Siccome "**GCH** $\Rightarrow$ **CH**", per contrapposizione "non-**CH** $\Rightarrow$ non-**GCH**", per cui se da **ZFC** si potesse dedurre non-**CH** si potrebbe dedurre anche non-**GCH**.

Ancora, siccome **CH** è un caso particolare di **GCH**, da **ZFC** non si può dedurre **GCH**. Quindi, sebbene valga il teorema 11.1, **GCH** e **AC** non sono equivalenti.

I risultati di Cohen, insieme a quelli di Gödel, sono raccolti in [5] e sanciscono l'*indipendenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi (generalizzata) del continuo dagli altri assiomi di* ***ZF***. In altre parole, sarebbe possibile assumere tanto l'assioma di scelta quanto la sua negazione e ottenere in entrambi i casi una teoria coerente (se, come tutti siamo portati a pensare, anche **ZF** lo è). Lo stesso discorso vale per l'ipotesi generalizzata del continuo: o questa o la sua negazione può essere aggiunta a **ZFC** senza il pericolo di produrre nuove contraddizioni.

Per quanto riguarda l'assioma di scelta, a partire dai risultati di Gödel e proseguendo con quelli di Cohen, si è assistito a un notevole indebolimento delle critiche al suo impiego. Attualmente, dato che i teoremi matematici che dipendono dall'assioma sono molti e decisamente importanti, e ad essi si rinuncerebbe malvolentieri, è convinzione della quasi totalità dei matematici che si debba assumere l'assioma di scelta e non la sua negazione[22].

Concludiamo questa nostra rassegna rimarcando la notevole *forza* dell'assioma di scelta: sebbene **AC** non rappresenti un principio che contrasta con l'intuizione, esso è comunque equivalente a teoremi che non sembrano particolarmente intuitivi (come il lemma di zorn), ma che si rivelano comunque utili per la costruzione dell'edificio matematico a cui siamo abituati. Da rilevare, d'altra parte, che questa stessa forza conduce anche a conseguenze che in qualche misura si oppongono al senso comune: il paradosso di Banach-Tarski ne è un chiaro esempio.

L'ultima osservazione che proponiamo riguarda l'equivalenza dell'assioma col *principio della tricotomia* (vedi sez. 10, conseguenza n. 9), la cui importanza lasciamo esprimere direttamente dalle parole di G. Lolli:

> "La confrontabilità di due insiemi qualunque quanto a cardinalità sembra una proprietà naturale e desiderabile, almeno rispetto alle intuizioni più ingenue degli insiemi; con la cardinalità espressa per mezzo di iniezioni, la confrontabilità comporta che l'universo è connesso, nel senso che due insiemi qualunque sono collegati da una funzione; questa proprietà costituisce una delle più forti giustificazioni dell'assioma di scelta." [21, p. 54]

Riferimenti bibliografici

[1] Abian, A. *La teoria degli insiemi e l'aritmetica transfinita*. Feltrinelli, Milano, 1972. (ed. orig. *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1965).

[2] Bell, J. L. *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge University Press, New York, second edition, 2008.

[3] Borga, M. e Palladino, D. *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*. Editrice La Scuola, Brescia, 1997.

[4] Casalegno, P. e Mariani, M. *Teoria degli insiemi. Un'introduzione*. Carocci, Roma, 2004.

[5] Cohen, P. J. *La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo*. Feltrinelli, Milano, 1973. (ed. orig. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Benjamin, New York, 1966).

[6] Devlin, K. *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

[22] Non è chiaro, invece, quale fra l'ipotesi del continuo o la sua negazione sia più conveniente assumere.

[7] Di Nasso, M. Elementi di logica matematica. 2008. URL: http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/dinasso/ELM/elm-choice.pdf. Ultimo controllo: 27-02-2016.

[8] Fraenkel, A. A. *Teoria degli insiemi e logica*. Ubaldini Editore, Roma, 1970. (ed. orig. *Mengenlehre und Logik*. Dunker & Humblot, Berlin, 1968).

[9] Gilardi, G. *Analisi uno*. McGraw-Hill, Milano, 2a edizione, 1995.

[10] Gödel, K. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1940.

[11] Halmos, P. R. *Teoria elementare degli insiemi*. Feltrinelli, Milano, 1976. (ed. orig. *Naive Set Theory*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960).

[12] Hatcher, W. S. *Fondamenti della matematica*. Boringhieri, Torino, 1973. (ed. orig. *Foundations of Mathematics*. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1968).

[13] Herrlich, H. *Axiom of Choice*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[14] Howard, P. and Rubin, J. E. *Consequences of the Axiom of Choice*. Volume 59 of *Mathematical Survey and Monographs*. American Mathematical Society, 1998.

[15] Jech, T. J. *The Axiom of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[16] Lawvere, F. W. e Schanuel, S. H. *Teoria delle categorie: un'introduzione alla matematica*. Franco Muzzio, Padova, 1994. (ed. orig. *Conceptual Mathematics. A first introduction to categories*. Buffalo Workshop Press, New York, 1991. 2nd edition, Cambridge University Press, New York, 1997.)

[17] Leonesi, S. e Toffalori, C. Il problema del continuo. *Archimede*, 2:79–84, 2003.

[18] Lolli, G. *Categorie, universi e principi di riflessione*. Boringhieri, Torino, 1977.

[19] Lolli, G. *Dagli insiemi ai numeri*. Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[20] Lolli, G. *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*. il Mulino, Bologna, 2002.

[21] Lolli, G. *Guida alla teoria degli insiemi*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2008.

[22] Lolli, G. *Nascita di un'idea matematica*. Edizioni della Normale, 2013.

[23] Lolli, G. *QED. Fenomenologia della dimostrazione*. Bollati Boringhieri, Torino, 2005.

[24] Mendelson, E. *Introduzione alla logica matematica*. Bollati Boringhieri, Torino, 1972. (ed. orig. *Introduction to Mathematical Logic*. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1964).

[25] Monk, J. D. *Introduzione alla teoria degli insiemi*. Boringhieri, Torino, 1972. (ed. orig. *Introduction to Set Theory*. McGraw-Hill, New York, 1969).

[26] Moore, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origin, Development, and Influence*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[27] Palladino, D. L'assioma di scelta. *Archimede*, 27:149–160, 1975.

[28] Palladino, D. *Teoria degli insiemi da un punto di vista elementare*. Vita e Pensiero, Milano, 1975.

[29] Rubin, H. e Rubin, J. E. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[30] Rubin, H. e Rubin, J. E. *Equivalents of the Axiom of Choice*. Volume II. North-Holland, Amsterdam, 1985.

[31] Russell, B. *Introduzione alla filosofia matematica*. Newton & Compton, Roma, 1995 [1919]. (ed. orig. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Dover Publications, New York, 1993).

[32] Sleziak, M. Continuity and sequential continuity. 2006. URL: http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/texty/rozne/AC/cont.pdf. Ultimo controllo: 27-02-2016.

[33] Stoll, R. R. *Set Theory and Logic*. Dover Publications, New York, 1979.

[34] Wagon, S. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, New York, 1985.